



## L'INFLUENZA DEI FENOMENI LENTI NELLA COSTRUZIONE E NELL'ESERCIZIO DEI PONTI IN C.A.P.

### PARTE I: BASI TEORICHE

**Marcello Arici<sup>\*</sup>, Michele F. Granata<sup>\*</sup> e Piercarlo Margiotta<sup>\*</sup>**

<sup>\*</sup> Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Aerospaziale e Geotecnica (DISAG)  
Università di Palermo  
Viale delle Scienze, 90128 Palermo, Italy  
e-mail: arici@unipa.it, granata@unipa.it, piercarlo.margiotta@unipa.it

(Ricevuto il 24 Giugno 2009, Revisionato il 26 Giugno 2009, Accettato il 29 Giugno)

**Key words:** Bridges, Creep, Shrinkage, Relaxation, Prestressing.

**Parole chiave:** Ponti, Viscosità, Ritiro, Rilassamento, Precompressione.

**Abstract.** *Time-dependent phenomena as shrinkage and creep in concrete or relaxation in steel, deeply influence the stress and strain patterns of prestressed concrete bridges. Such phenomena are more relevant for staged-constructed bridges, in which a change of static scheme occurs by the addition of restraints to the initial scheme. In this first paper the influence of creep for sustained loads and prestressing is examined, taking into account prestressing loss due to shrinkage and steel relaxation, in the framework of linear viscoelasticity. In the companion paper the case of bridges built by the cantilever method, with static scheme changes during construction, will be examined in order to investigate the effects on prestressing as well as to evaluate the time-dependent stress and strain.*

**Sommario.** *I fenomeni lenti nel calcestruzzo, ritiro e viscosità, ed il rilassamento dell'acciaio di precompressione influenzano fortemente lo stato di sollecitazione e di deformazione dei ponti in cemento armato precompresso. Ciò assume una rilevanza ancora maggiore quando, durante la costruzione per fasi, si modificano i vincoli e quindi lo schema statico varia. In questa prima nota viene esaminata l'influenza della viscosità nella struttura per carichi applicati e precompressione, tenendo conto delle cadute di tensione anche per ritiro e rilassamento, nell'ambito della viscoelasticità lineare. In una successiva nota verrà considerato il caso del cambiamento di schema statico, con particolare riferimento ai ponti costruiti a sbalzo, indagando gli effetti sulla precompressione e valutando le conseguenze sul regime statico e deformativo.*

## 1 INTRODUZIONE

Lo stato di sollecitazione e di deformazione di un ponte in cemento armato precompresso è fortemente influenzato dal comportamento nel tempo dei materiali, calcestruzzo e acciaio, sia

nelle fasi di costruzione che durante la vita di servizio della struttura. La viscosità ed il ritiro del calcestruzzo, così come il rilassamento dell'acciaio dell'armatura di precompressione, modificano infatti nel tempo lo stato di deformazione e di tensione. Tali effetti sono importanti specialmente durante le fasi di costruzione, in cui lo schema statico della struttura varia passando attraverso strutture parziali per raggiungere la configurazione finale di esercizio. Nelle strutture non omogenee, in cui le sezioni sono composte da materiali diversi, la viscosità del calcestruzzo è responsabile della migrazione delle tensioni dal calcestruzzo, materiale meno rigido e maggiormente soggetto al fenomeno di scorrimento viscoso, all'acciaio, materiale più rigido che, in relazione alle tensioni di lavoro, non presenta fenomeni viscosi. Le deformazioni differite inoltre sono responsabili delle cadute lente nel tempo della precompressione. Gli effetti principali della viscosità nei ponti in cemento armato precompresso sono dunque:

- 1) aumento delle deformazioni per carichi permanenti nel tempo;
- 2) diminuzione dello stato tensionale per deformazioni imposte costanti nel tempo;
- 3) redistribuzione delle sollecitazioni dovuta ad un cambiamento di schema statico, quando si aggiungono vincoli posticipati alla struttura precedentemente caricata;
- 4) migrazione delle tensioni nella sezione non omogenea o tra parti di struttura di diverso materiale;
- 5) caduta dello sforzo di precompressione.

L'influenza della viscosità sul comportamento a lungo termine delle strutture presenta un duplice aspetto: il primo, positivo, è quello di mitigare l'effetto tensionale delle deformazioni imposte inattese che dovessero verificarsi ad esempio per cedimenti differenziali degli appoggi. Il secondo aspetto è invece generalmente negativo: la viscosità fa crescere le deformazioni elastiche iniziali dovute ai carichi permanenti e vanifica l'effetto di deformazioni imposte artificialmente durante la costruzione per migliorare il comportamento strutturale. Negli archi funicolari ad esempio, i momenti parassiti dovuti all'accorciamento assiale iniziale, che potrebbero essere eliminati introducendo delle coazioni attraverso l'uso di martinetti, secondo la tecnica introdotta da Freyssinet, vengono parzialmente reintrodotti a causa della viscosità del calcestruzzo.

Nelle strutture non omogenee composte da getti di calcestruzzi di differenti proprietà (anche per i diversi tempi del getto) o da sezioni miste acciaio-calcestruzzo, la migrazione delle tensioni dai materiali più viscosi a quelli che risentono meno dello scorrimento viscoso, può comportare nel tempo il raggiungimento di stati critici per fessurazione del calcestruzzo o per forti incrementi delle tensioni nell'acciaio. In generale, può affermarsi che le strutture con forti eterogeneità sono maggiormente soggette agli effetti della viscosità e ciò ha immediate conseguenze sul costo dell'opera. In queste strutture infatti sono necessari espedienti che limitino gli effetti della viscosità in costruzione prima e in esercizio successivamente, come la previsione di opportune controfrecce di costruzione o il bilanciamento dei carichi attraverso la precompressione per limitare la redistribuzione per variazione di schema statico.

Le tecniche costruttive dei ponti in cemento armato precompresso sono molto diversificate ma presentano generalmente un susseguirsi di fasi costruttive con schemi statici e carichi che possono variare fino a raggiungere la configurazione finale di esercizio. Inoltre si possono avere sia elementi gettati in situ che prefabbricati e successivamente assemblati; ciò influenza molto le deformazioni viscosi. Tra queste, la tecnica di costruzione dei ponti per sbalzi successivi (balanced cantilever method) è oggi uno dei metodi maggiormente usati per l'efficienza e la velocità di costruzione dei ponti in cemento armato precompresso. Il principio è quello di avanzare attraverso la costruzione di conci di impalcato a partire dalle pile procedendo simmetricamente (ove possibile) da un lato e dall'altro della pila e connettendo i

conci successivi ai precedenti tramite precompressione, ottenendo mensole di lunghezze crescenti fino alla mezzeria della campata. I conci possono essere gettati in opera con opportune casseforme a sbalzo oppure essere prefabbricati e successivamente varati ed assemblati in opera. In questa fase i cavi di precompressione sono sempre posti superiormente per compensare il momento flettente negativo dovuto al peso proprio dei conci stessi. A questo punto le due mensole che costituiscono le semicampate vengono unite in mezzeria. La continuità dell'impalcato viene ottenuta inserendo ulteriori cavi di precompressione nella zona inferiore (cavi di continuità), raggiungendo lo schema di trave continua su più appoggi (le pile) o di telaio a più campate se si sceglie di mantenere la connessione rigida con le pile. Oltre che per i carichi mobili di esercizio, i cavi di continuità in campata servono anche a diminuire l'effetto dell'incremento di deformazione nel tempo verso il basso. Tale incremento per viscosità, è dovuto oltre che ai carichi permanenti applicati, anche all'effetto della redistribuzione delle sollecitazioni che fa aumentare il momento positivo in campata. Importanti sono anche gli effetti della viscosità per ponti costruiti con altre metodologie, come ad esempio travi prefabbricate inizialmente appoggiate e poi rese continue, ponti a travata realizzati per spinte successive, ponti ad arco costruiti per sbalzi successivi e ponti strallati con impalcato in calcestruzzo.

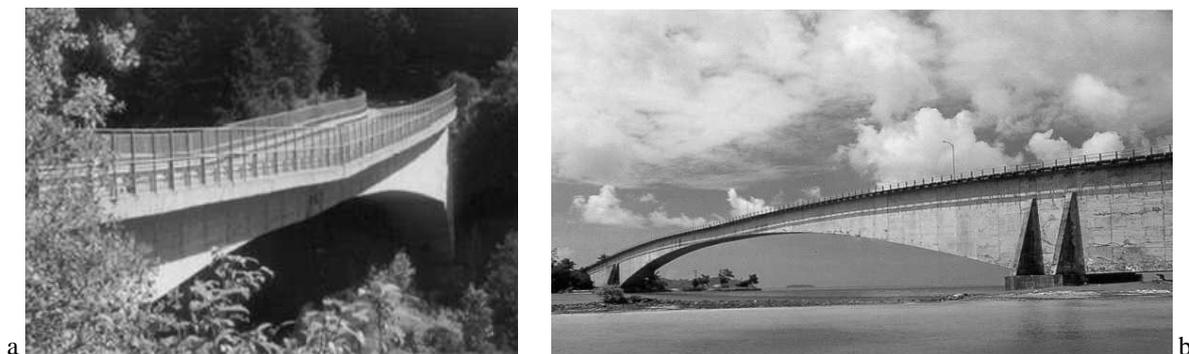


Figura 1: Ponti che hanno presentato problemi dovuti agli effetti dei fenomeni lenti. a) Rio Sinigo; b) Koror-Babeldaob a Palau, prima del crollo.

La viscosità ha inoltre un importante effetto sulla durabilità e sulle condizioni di esercizio della struttura, in particolare il suo stato limite di deformazione e di fessurazione. Il ponte sul Rio Sinigo, costruito in Italia nel 1982, con il metodo degli sbalzi successivi con getto in situ di conci in calcestruzzo leggero strutturale, ha presentato dopo alcuni anni dalla costruzione, una freccia in mezzeria di oltre 50 cm (fig. 1a). Lo stesso è accaduto nel ponte Yuan-Shan a Taiwan [1], nel quale è stato registrato uno spostamento verticale di circa 60 cm della connessione a cerniera nella mezzeria della campata, analoga a quella del Rio Sinigo. Inoltre, alla viscosità ed agli effetti della forte non omogeneità di grandi strutture da ponte viene imputata da parte di alcuni studiosi l'eccessiva deformazione prima del crollo, dopo molti anni dalla costruzione, del ponte Koror-Babeldaob a Palau [2,3] (fig. 1b); altri autori hanno evidenziato anche ulteriori cause che portarono al crollo [4]. I tre casi sopra citati sono comunque relativi a ponti costruiti con il metodo degli sbalzi successivi con getti in situ e con schema finale di trave con cerniera in mezzeria. Questo schema statico è in effetti sconsigliabile proprio perché ha manifestato una eccessiva sensibilità alle deformazioni per creep che crescono in mezzeria molto di più del caso in cui si preveda una connessione in chiave con un concio di sutura che realizza un incastro interno. Inoltre, mentre nel caso della cerniera in chiave non si hanno generalmente armature inferiori di precompressione in campata, nel caso della connessione ad incastro che rende l'impalcato continuo, la

precompressione inferiore di continuità è sempre necessaria e viene dimensionata sul valore di momento positivo indotto dai carichi mobili, solitamente il più oneroso. La precompressione inferiore ha il benefico effetto di fornire spostamenti verso l'alto, in direzione opposta all'incremento di deformazione viscosa, per la quale invece risulta generalmente preponderante lo spostamento indotto dal peso proprio verso il basso. Oggi la tendenza è quella di realizzare ponti a conci prefabbricati con schema finale a trave continua.

Normalmente, i ponti di dimensioni piccole e medie non sono eccessivamente sensibili al fenomeno della viscosità nei confronti della capacità ultima della struttura, ma soltanto in termini di stato deformativo a lungo termine. Le grandi strutture invece, sono sensibili anche nei riguardi della resistenza ultima, per gli effetti della non linearità e della comparsa e crescita nel tempo della fessurazione per ritiro e creep non uniforme. Inoltre in tali strutture, un progressivo incremento delle deformazioni può portare nel tempo a fenomeni di instabilità per effetti del secondo ordine. Ad esempio, negli archi snelli con un limitato rapporto freccia/luce, nascono alti valori di sforzo normale nel calcestruzzo; una possibile alterazione del profilo longitudinale, dovuto all'incremento di deformazione viscosa, potrebbe innescare una risposta non lineare della struttura con fenomeni di perdita di forma e stabilità (snap-through effect).

Sono dunque necessari metodi affidabili di analisi del comportamento a lungo termine delle strutture soggette a fenomeni lenti. Tali metodi devono intervenire fin dalle prime fasi di progetto (*conceptual design*) della struttura. In fase iniziale possono essere di semplice ed immediata applicazione per la valutazione del comportamento globale della struttura. Successivamente tali metodi devono essere raffinati tramite procedure numeriche più accurate con analisi all'interno della sezione che tengano conto della non omogeneità. Per il primo stadio può dunque essere sufficiente un approccio che si fondi sulla teoria della viscoelasticità lineare (considerando la struttura monodimensionale e omogenea), per interpretare il comportamento globale e prevedere i cambiamenti dello stato di deformazione e di tensione durante la costruzione e la vita di servizio della struttura. Successivamente, il secondo livello dovrà prevedere la messa in conto, anche attraverso appositi modelli numerici ad elementi finiti, della non omogeneità e del comportamento non lineare, per quelle strutture di grandi dimensioni, con forti eterogeneità e che risultano molto sensibili al creep sia dal punto di vista dello stato limite di esercizio (per deformazione e fessurazione) che di quello ultimo (di collasso della struttura).

Negli ultimi 50 anni molti autori hanno studiato gli effetti delle deformazioni differite nel tempo sulle strutture da ponte e su questo punto è disponibile una ricca letteratura. Poiché la soluzione del problema della viscosità è possibile analiticamente soltanto attraverso procedure al passo, sono stati proposti anche alcuni metodi semplificati e approssimati. Tra questi il più diffuso è quello inizialmente proposto da Trost [5] e successivamente messo a punto da Bažant [6,7] attraverso la definizione di un *coefficiente di invecchiamento*. Il metodo è noto come *Age Adjusted Effective Modulus (AAEM) Method*, ovvero metodo del modulo effettivo corretto con invecchiamento ed è molto utile ai progettisti in quanto fornisce soluzioni accurate ed accettabili per molti problemi concreti che si presentano nella pratica progettuale. Un approccio sistematico e razionale basato sulla teoria della viscoelasticità lineare con invecchiamento è stato proposto da Chiorino e dai suoi collaboratori [8,9] per l'analisi del comportamento globale delle strutture soggette a viscosità, in particolare per strutture in cui lo schema statico varia per aggiunta di vincoli posticipati all'applicazione del carico. Mola [10,11] ha introdotto l'utilizzo delle funzioni di rilassamento ridotto per affrontare alcune problematiche legate alla presenza di vincoli elastici ed a strutture viscosamente non omogenee, mediante la modifica delle funzioni utilizzate per le strutture omogenee. Dezi,

Menditto e Tarantino [12] hanno studiato l'effetto di variazioni dello schema statico in strutture reologicamente non omogenee. Arici e Granata [13] hanno proposto un'estensione del terzo teorema ai casi di cambiamenti di schema statico per successive aggiunte e rimozioni di vincoli durante le fasi di costruzione.

Dilger [14] ha studiato l'effetto della viscosità nelle sezioni non omogenee e la migrazione delle tensioni attraverso l'uso della *creep transformed section*. Sulla base di ciò Dilger, Tadros e Ghali [15,16,17,18] hanno puntualizzato il fenomeno delle cadute di tensione della precompressione per fenomeni lenti, suggerendo alcune espressioni, ancora oggi utilizzate e recepite da alcune norme, come lo stesso Eurocodice 2 sulle strutture in calcestruzzo [19]. Kristek [20,21] ha analizzato l'influenza della distribuzione dei cavi di precompressione sulle eccessive deformazioni che si presentano a lungo termine per effetto della viscosità nei ponti a campate molto lunghe. Recentemente Hedjazi et al. [22] hanno proposto delle soluzioni speditive basate sul metodo AAEM per ponti in c.a.p. costruiti a sbalzo, confrontando le soluzioni approssimate con analisi agli elementi finiti. Tutte le analisi presenti in letteratura si basano sui modelli di viscosità attualmente disponibili e sviluppati attraverso dati raccolti in alcuni database; i modelli di viscosità proposti in letteratura e nelle norme tecniche dei diversi Paesi (ACI209-92, CEB MC90, GL2000, B3) risultano purtroppo piuttosto differenti nelle loro previsioni [23-28], per cui l'utilizzo di diversi modelli può portare a risultati tra loro molto differenti [3,8], sebbene il comportamento globale e la tendenza del comportamento della struttura nel tempo siano chiaramente individuabili.

Questo studio presenta l'analisi del comportamento a lungo termine, prevalentemente dovuto agli effetti della viscosità, di ponti in cemento armato precompresso. Nella prima parte si esporranno le basi teoriche della teoria della viscoelasticità lineare con invecchiamento per strutture a vincoli invariabili nel tempo, precisando gli effetti dovuti ai carichi permanenti e alla precompressione. Nella seconda parte verranno successivamente considerate strutture con *staged construction*, che presentano cioè una costruzione in fasi durante la quale lo schema statico ed i carichi applicati variano fino al raggiungimento della configurazione finale di servizio [29]. In particolare, per la precompressione, nei casi di cambiamento dello schema statico, verrà affrontato l'aspetto di variazione degli stati tensionali e deformativi, la cui previsione risulta critica poiché presenta notevoli fonti di incertezza. Verranno fornite relazioni approssimate per una valutazione speditiva utile nelle fasi di conceptual design di questa tipologia di ponti, con particolare riferimento alla costruzione a sbalzo.

Le soluzioni presentate sono approssimate perché non tengono conto degli effetti di shear-lag, di ritiro e viscosità non uniforme, della non linearità dovuta al cracking, effetti che possono essere importanti nelle grandi strutture altamente sensibili ma che possono essere tenuti in conto solo tramite modellazioni ad elementi finiti 3D e raffinamento dei modelli di creep, con leggi rate-type [2,4]. Ciononostante, come detto e come si vedrà anche in seguito, i modelli di viscosità forniscono previsioni molto differenti tra loro ed i parametri in gioco sono numerosi e diversificati nella loro importanza, per cui gli errori che si commettono nell'applicazione dei diversi modelli sono dello stesso ordine di grandezza di quelli che si hanno trascurando gli effetti sopra esposti. Di conseguenza le soluzioni ricavate dalle leggi della viscoelasticità lineare con invecchiamento, secondo un approccio rigoroso e coerente a partire dalle ipotesi di base di tale teoria, sono in grado di fornire la tendenza nel comportamento globale della struttura, che è il passo fondamentale per comprendere gli effetti dei fenomeni lenti sui ponti in cemento armato precompresso a schema variato.

Dopo un inquadramento generale del problema, sviluppato in questa prima parte, viene presentato uno studio sulla valutazione delle cadute di sforzo della precompressione, prima per sola viscosità e successivamente per il contributo di ritiro e rilassamento. A tal proposito,

la precompressione viene interpretata come una distorsione imposta in una struttura viscosamente omogenea con vincoli elastici, utilizzando la teoria delle funzioni di rilassamento ridotte, sviluppata da Mola [10,11].

Il problema delle strutture nelle quali i vincoli vengono variati durante la costruzione verrà sviluppata in una successiva nota, presentando anche risultati numerici su esempi concreti di ponti costruiti a sbalzo.

## 2 TEORIA DELLA VISCOELASTICITÀ LINEARE

Le azioni prevalenti sulla struttura d'impalcato di un ponte durante le fasi di costruzione sono generalmente il peso proprio e la precompressione. Mentre il peso proprio può essere considerato come un'azione esterna permanente applicata, la precompressione va considerata come una particolare distorsione imposta, cioè come un'azione geometrica imposta che permane nel tempo. Alla fine della costruzione, la precompressione può essere completata attraverso la tesatura di ulteriori cavi di continuità e vengono applicati i carichi permanenti aggiuntivi dovuti alla pavimentazione e alla sovrastruttura. Infine, in esercizio si hanno i carichi mobili dovuti al traffico, i quali però vanno trattati come carichi variabili che non permangono nel tempo e che quindi non hanno influenza sulla viscosità. Questa va invece considerata per azioni esterne permanenti applicate e distorsioni dovute alla precompressione, sia nelle fasi di costruzione che in esercizio, valutando gli stati di sollecitazione e gli spostamenti indotti nel tempo.

Nei ponti in c.a.p. con sezione a cassone, il livello delle tensioni di compressione nel calcestruzzo in tutte le fasi non supera generalmente il 40÷50% delle tensioni di rottura a compressione. In tale ambito è possibile ritenere ancora valido il principio di sovrapposizione degli effetti, ovvero è possibile sommare gli effetti di carichi e distorsioni che vengono applicate sulla struttura in tempi successivi, secondo l'ipotesi di Mac Henry [8]. Se poi lo spessore dei singoli elementi che compongono la sezione d'impalcato (solette, anime, etc...) non presentano differenze dimensionali significative (sono dello stesso ordine di grandezza), è possibile assumere l'ipotesi di comportamento viscosamente omogeneo delle sezioni e quindi si può studiare la struttura con un modello viscoelastico lineare monodimensionale lungo il suo asse. Ciò implica che la risposta del calcestruzzo per azioni differenti applicate in tempi successivi può essere trovata come somma dei singoli effetti, applicando il principio di sovrapposizione (la linearità è dunque riferita alla possibilità di sommare gli effetti e non all'andamento del fenomeno viscoso e alla forma delle relative funzioni nel tempo).

### 2.1 Principi fondamentali della viscoelasticità lineare

Lo sviluppo delle deformazioni del calcestruzzo nel tempo può essere modellato attraverso la *funzione di viscosità*  $J(t, t_0)$ , la quale rappresenta la deformazione totale al tempo  $t$  per una tensione unitaria applicata al tempo  $t_0$ . La sola aliquota viscosa della deformazione, che si aggiunge alla quota elastica iniziale e che è funzione del tempo, è data invece dal cosiddetto *coefficiente di viscosità*  $\varphi(t, t_0)$ . Di conseguenza il valore della deformazione dipendente dallo stato tensionale indotto da un carico, risulta proporzionale alle tensioni indotte al tempo  $t_0$  (tempo di applicazione del carico), tramite la funzione di viscosità  $J(t, t_0)$ , funzione dei tempi  $t$  e  $t_0$  (misurati in giorni), a partire dall'origine posta alla data del getto del conglomerato:

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \sigma_c(t_0) J(t, t_0) = \varepsilon_{\sigma}(t_0) [1 + \varphi(t, t_0)] = \sigma_c(t_0) \left[ \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}} \right] \quad (1)$$

in cui  $\varepsilon_{\sigma}(t)$  è la deformazione totale, somma della parte elastica e di quella viscosa, al tempo  $t$  successivo all'applicazione del carico;  $\sigma_c(t_0)$  è la tensione indotta nel calcestruzzo al tempo di applicazione del carico;  $\varepsilon_{\sigma}(t_0)$  è la deformazione elastica indotta dalla tensione  $\sigma_c(t_0)$ ;  $\varphi_{28}(t, t_0)$  è il coefficiente di viscosità riferito al modulo elastico convenzionale del calcestruzzo a 28 giorni di maturazione  $E_{c28}$ ;  $E_c(t_0)$  è il modulo elastico del calcestruzzo al tempo di applicazione del carico.

La funzione di viscosità  $J(t, t_0)$  (*compliance function*), viene fornita dalla letteratura specializzata e dalle norme per un determinato modello di viscosità adottato, attraverso il coefficiente di viscosità  $\varphi(t, t_0)$ . Se la storia tensionale, successivamente all'applicazione del primo carico, è divisa in intervalli infinitesimi  $d\sigma_c$  di successive tensioni dipendenti da carichi applicati, al generico tempo  $t$ , attraverso il principio di sovrapposizione degli effetti, è possibile scrivere la relazione:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0)J(t, t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \tau) d\sigma_c(\tau) \quad (2)$$

la quale rappresenta la formulazione integrale della viscosità lineare per strutture con comportamento omogeneamente viscoso per successive applicazioni di carichi che permangono nel tempo.

Reciprocamente in una struttura, inizialmente iperstatica, in presenza di una deformazione impressa variabile nel tempo, le deformazioni elastiche non variano mentre le tensioni variano con l'espressione integrale duale della (2):

$$\sigma_c(t) = \varepsilon_{\sigma}(t_0)R(t, t_0) + \int_{t_0}^t R(t, \tau) d\varepsilon_{\sigma}(\tau) \quad (3)$$

in cui  $R(t, t_0)$  è la *funzione di rilassamento*, reciproca della funzione di viscosità, e rappresenta la tensione totale al generico tempo  $t$ , dovuta ad una deformazione imposta unitaria al tempo  $t_0$ . Ovviamente se la deformazione è dovuta ad una distorsione iniziale applicata al tempo  $t_0$ , ad esempio un cedimento anelastico impresso ad uno dei vincoli, nella struttura la deformata si mantiene costante nel tempo, mentre lo stato tensionale diminuisce, a partire dal tempo  $t_0$ , con la legge determinata dalla funzione di rilassamento  $R(t, t_0)$ , decrescente nel tempo. La funzione di rilassamento può essere ottenuta numericamente dalla funzione di viscosità  $J(t, t_0)$ , attraverso l'integrazione numerica dell'equazione integrale di Volterra

$$1 = R(t_0, t_0)J(t, t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \tau) dR(\tau, t_0) \quad (4)$$

La funzione  $J(t, t_0)$ , fornita dal modello di viscosità, dipende oltre che dal tempo di applicazione del carico, da altri parametri fondamentali: l'umidità relativa media  $RH$  (%) dell'ambiente in cui matura il calcestruzzo, la resistenza caratteristica di rottura del calcestruzzo  $f_{ck}$ , la superficie esposta all'ambiente attraverso il coefficiente  $2A_c/u$  (notional size) in cui  $A_c$  è l'area della sezione di calcestruzzo e  $u$  è il perimetro della sezione. In figura 2 sono riportati i diagrammi semilogaritmici di esempio delle funzioni  $J(t, t_0)$  e  $R(t, t_0)$  per fissati valori di tali parametri.

L'analisi delle strutture a vincoli rigidi, viscosamente omogenee e con schema statico invariabile si basa dunque sui primi due teoremi fondamentali della viscoelasticità lineare.

Il *primo teorema della viscoelasticità lineare* stabilisce che se ad una struttura in calcestruzzo, omogeneamente viscosa ed a vincoli rigidi invariabili nel tempo, viene applicato al tempo  $t_0$  un carico permanente che resta sulla struttura durante la maturazione del calcestruzzo, lo stato tensionale provocato al tempo  $t_0$ , si mantiene costante nel tempo, mentre

la deformata iniziale cresce con legge  $J(t, t_0)$ .

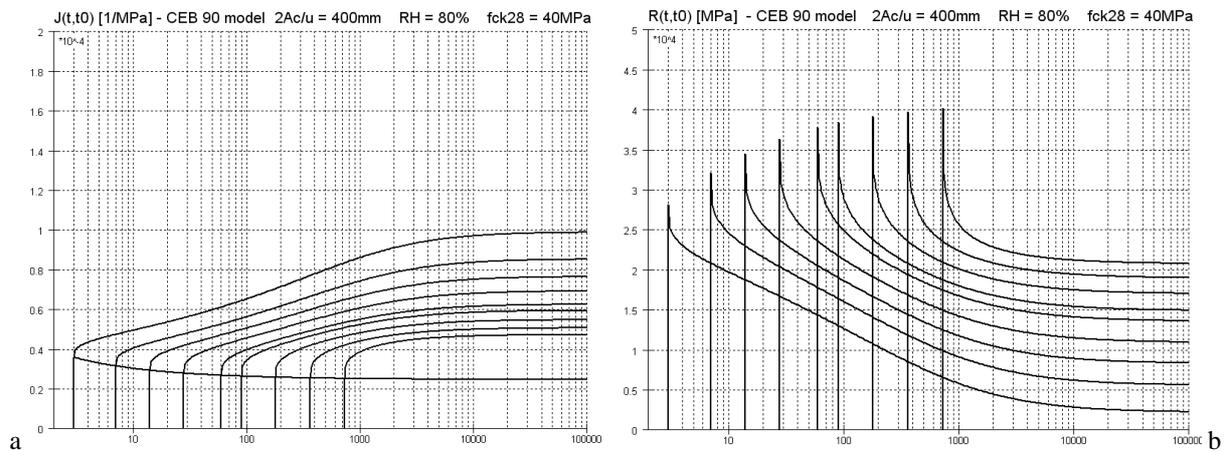


Figura 2: Esempio di funzioni del CEB Model Code 90 per diversi valori del tempo  $t_0$ ,  $RH=80\%$ ,  $2A_c/u=400$  mm,  $f_{ck} = 40$  MPa. a) Funzione di viscosità  $J(t, t_0)$ . b) Funzione di rilassamento  $R(t, t_0)$ .

Viceversa il *secondo teorema della viscoelasticità lineare* stabilisce che se alla struttura viene applicata una deformazione impressa al tempo  $t_0$ , (ad esempio si impone un cedimento anelastico ad un appoggio di una struttura iperstatica) la deformata indotta inizialmente permane nel tempo, mentre lo stato di tensione che insorge nella struttura per la distorsione impressa decresce con la funzione di rilassamento  $R(t, t_0)$ .

## 2.2 Metodo AAEM

L'approccio dell'AAEM semplifica le relazioni viste sopra sostituendo alle equazioni integrali una soluzione approssimata che si basa sulla cosiddetta algebrizzazione [30] di tali equazioni. Ciò significa che le relazioni costitutive del problema elastico vengono sostituite da una legge costitutiva dello stesso tipo di quella elastica in cui viene introdotto un modulo elastico che si va modificando, per tenere conto dell'accumulo delle deformazioni viscosi nel tempo.

Il metodo AAEM è stato originariamente formulato per storie di deformazione che iniziano al tempo  $t_0$  con un primo valore finito di deformazione ed evolvono con leggi che risultano combinazioni lineari del coefficiente di viscosità. Per storie di deformazione maggiormente complesse in cui si ha l'applicazione di azioni in tempi diversi, si può utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti. Ciò risulta utile anche nel caso del terzo teorema, quando si hanno cambiamenti dello schema statico.

Se nella relazione (2) si esprime la funzione di viscosità  $J(t, t_0)$  tramite il coefficiente di viscosità ed il modulo elastico del calcestruzzo, si ha

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \int_{t_0}^t \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \frac{\partial \sigma_c(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (5)$$

Introducendo il coefficiente di invecchiamento  $\chi(t, t_0)$ , la relazione (5) può essere espressa in forma algebrica:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} [1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)] \quad (6)$$

Dalla (6) è possibile ricavare il modulo elastico effettivo (*Effective Modulus, EM*) e quello corretto con invecchiamento (*Age Adjusted Effective Modulus, AAEM*), che esprimono l'accumulo di deformazione viscosa nel tempo. Il primo (EM) è relativo al caso di azioni che mantengono il livello di tensione costante nel tempo, mentre il secondo (AAEM) è relativo al caso di tensioni variabili tra  $\sigma_c(t_0)$  e  $\sigma_c(t)$ . La (6) si può riscrivere quindi in una forma meccanicamente più comprensibile:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c,eff}(t, t_0)} + \frac{\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)}{E_{c,adj}(t, t_0)} \quad (7)$$

in cui il modulo effettivo  $E_{c,eff}(t, t_0)$  è dato da

$$E_{c,eff}(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (8)$$

mentre il modulo modificato  $E_{c,adj}(t, t_0)$  è dato da

$$E_{c,adj}(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi(t, t_0)\varphi(t, t_0)} \quad (9)$$

Il coefficiente di invecchiamento, nella (6) e nella (9), risulta definito dalla relazione

$$\chi(t, t_0) = \frac{1}{1 - R(t, t_0)/E_c(t_0)} - \frac{1}{E_c(t_0)J(t, t_0) - 1} = \frac{E_c(t_0)}{E_c(t_0) - R(t, t_0)} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)} \quad (10)$$

Attraverso l'algebrizzazione è possibile dare una definizione analitica della funzione di rilassamento a partire dal coefficiente di viscosità, ottenendo l'espressione:

$$R(t, t_0) = \left( 1 - \frac{\varphi(t, t_0)}{1 + \chi(t, t_0)\varphi(t, t_0)} \right) E_c(t_0) \quad (11)$$

L'algebrizzazione del metodo AAEM evita la risoluzione numerica delle equazioni integrali di Volterra permettendo di riscrivere tutte le relazioni fondamentali delle leggi della viscoelasticità lineare tramite espressioni algebriche di più facile utilizzo anche in campo professionale. Per fare ciò basta conoscere il coefficiente di viscosità  $\varphi(t, t_0)$  ed il coefficiente di invecchiamento  $\chi(t, t_0)$ , che sono ambedue funzioni del tempo. Il coefficiente di viscosità viene fornito dalle norme o dalla letteratura specializzata in base al modello di viscosità prescelto; il coefficiente di invecchiamento può essere determinato tramite integrazione numerica dalla (10) in quanto non è nota a priori in forma algebrica la funzione  $R(t, t_0)$ , la quale viene ricavata per integrazione a partire dalla  $J(t, t_0)$ .

In letteratura esistono diverse espressioni semplificate della funzione  $\chi(t, t_0)$  [7, 27]. In figura 3 viene riportata tale funzione per vari tempi di applicazione del carico. Si nota che essa varia generalmente tra 0.6 e 1.0, per cui è ormai accettato l'uso generalizzato di un valore medio costante approssimato di circa 0.8, assumendo il coefficiente di invecchiamento pressoché costante nel tempo per molte applicazioni pratiche.

Per permettere con semplicità ai ricercatori ed ai progettisti l'integrazione numerica per i modelli di viscosità maggiormente in uso, è stata creata dai ricercatori del Politecnico di Torino una pagina web dalla quale può essere facilmente scaricato un software di ausilio che fornisce i valori delle funzioni di viscosità, rilassamento e dei coefficienti di invecchiamento per diversi modelli [31].

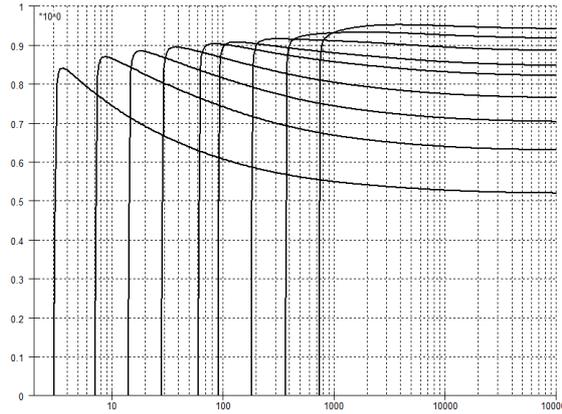


Figura 3: Esempio di funzioni del CEB Model Code 90. Coefficiente di invecchiamento  $\chi(t, t_0)$  per diversi valori del tempo  $t_0$ .  $RH=80\%$ ,  $2A_c/u = 400$  mm,  $f_{ck} = 40$  MPa.

### 2.3 Funzione di rilassamento ridotta

Finora è stata considerata sempre una struttura omogeneamente viscosa a vincoli rigidi. Si consideri ora che la struttura (isostatica o iperstatica) possa avere, oltre a  $m$  vincoli rigidi, anche un numero  $n$  di vincoli elastici sovrabbondanti. Si applichino, al tempo  $t_0$ , delle distorsioni  $\eta_i$  ( $i=1..n$ ) ai vincoli elastici, imponendo uno spostamento relativo costante lungo la direzione del vincolo e si indichi con  $X_i(t)$  la reazione di ogni vincolo elastico ( $i=1..n$ ) al generico tempo  $t > t_0$ . L'equazione di congruenza ad ogni istante  $t$ , negli  $n$  punti vincolati elasticamente, impone l'eguaglianza dello spostamento relativo tra il punto della struttura in cui è applicato il vincolo elastico  $i$ -esimo, che si deforma per la viscosità, ed il vincolo, con lo spostamento relativo imposto al vincolo stesso. Attraverso la simbologia utilizzata da Mola et al. in [10] e [11], l'equazione di congruenza si può scrivere nella forma matriciale:

$$\begin{aligned} & \delta_c(t_0)\mathbf{X}(t_0)E_c(t_0)J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \delta_c(t_0)d\mathbf{X}(\tau)E_c(t_0)J(t, \tau) + \\ & + \delta_s \left[ \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t d\mathbf{X}(\tau) \right] + \delta_\eta = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

in cui:

$\delta_c(t_0)$  è la matrice di deformabilità della struttura in calcestruzzo, con gli  $m$  vincoli rigidi, nei punti di contatto con i vincoli elastici, al tempo  $t_0$  di applicazione del carico;

$\delta_s$  è la matrice di deformabilità dei vincoli elastici;

$\delta_\eta$  è il vettore che raccoglie gli spostamenti relativi imposti dei vincoli elastici;

$\mathbf{X}(t)$  è il vettore delle reazioni vincolari dei vincoli elastici.

La soluzione dell'equazione (12) fornisce le reazioni dei vincoli elastici  $\mathbf{X}(t)$  ad ogni tempo:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{K} \mathbf{\Omega} \mathbf{\rho}^*(t, t_0) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X}_{\eta_r} \quad (13)$$

in cui:

$\mathbf{K}$  è la matrice modale delle componenti degli autovettori della matrice  $\mathbf{D} = [\delta_c(t_0) + \delta_s]^{-1} \delta_c(t_0)$ ;

$\mathbf{\Omega} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{K}$  è la matrice diagonale spettrale di  $\mathbf{D}$ , contenente gli autovalori  $\omega_i$  della matrice  $\mathbf{D}$ ;

$\mathbf{\rho}^*(t, t_0) = \text{diag} [R_i^*(t, t_0)/E_c(t_0)]$  è la matrice diagonale delle *funzioni di rilassamento ridotte*;

$\mathbf{X}_{\eta_r}$  è il vettore delle reazioni vincolari degli  $n$  vincoli elastici, considerati rigidi, per effetto dell'applicazione delle distorsioni  $\eta_i$ .

La funzione di rilassamento ridotta per l' $i$ -esimo vincolo è definita dalla relazione integrale

$$1 = R_i^*(t_0, t_0) J_i^*(t, t_0) + \int_{t_0}^t J_i^*(t, \tau) dR_i^*(\tau, t_0) \quad (14)$$

analoga della (4) per il caso di vincoli elastici ed in cui la funzione di viscosità modificata per la presenza di vincoli elastici è definita dalla relazione

$$J_i^*(t, t_0) = \frac{1 - \omega_i}{E_c(t_0)} + \omega_i J(t, t_0) \quad (15)$$

La (14) e la (15) vanno interpretate come una modifica delle funzioni di viscosità e di rilassamento che erano state definite per il caso di vincoli rigidi indipendentemente dalla struttura, nel caso di  $n$  vincoli elastici applicati alla struttura considerata. Per la loro determinazione è dunque necessario conoscere gli autovalori  $\omega_i$  della matrice  $\mathbf{D}$  della struttura e la funzione di viscosità. In questo modo l'equazione (13) fornisce il valore delle reazioni vincolari dei vincoli elastici in una struttura di calcestruzzo viscosamente omogenea per la quale valgono ancora i teoremi fondamentali della viscoelasticità lineare, ma in cui si modificano le funzioni di viscosità e rilassamento.

Nel caso della presenza di un solo vincolo elastico, la relazione (12) diventa:

$$X(t_0) J^*(t, t_0) + \int_{t_0}^t dX(\tau) J^*(t, \tau) = \frac{X_\eta(t_0)}{E_c(t_0)} \quad (16)$$

in cui  $X_\eta(t_0) = \omega X_{\eta r}$  è la reazione iniziale del vincolo elastico soggetto alla distorsione imposta  $\eta$ , la quale è fornita dal prodotto dell'autovalore  $\omega$  per la corrispondente reazione del vincolo considerato rigido. La soluzione della (16) è:

$$X(t) = X_\eta(t_0) \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (17)$$

e rappresenta un caso particolare della (13) per la presenza di un solo vincolo elastico.

La (17) mostra che, mentre per una struttura a vincoli rigidi soggetta ad una distorsione imposta, la legge di variazione delle sollecitazioni segue la funzione di rilassamento tramite la (3) e quindi per la reazione del vincolo rigido si ha  $X(t) = X(t_0) R(t, t_0) / E_c(t_0)$ , nel caso di vincoli elastici, invece, la legge di variazione delle sollecitazioni segue la funzione di rilassamento ridotta tramite la (17). Si può quindi affermare che attraverso le funzioni di rilassamento ridotte è possibile trattare strutture a vincoli elastici o che presentino delle non omogeneità (per esempio per effetto di parti in acciaio che costituiscono vincoli elastici interni alla struttura di calcestruzzo) come strutture di calcestruzzo omogenee per le quali continuano a valere i teoremi visti precedentemente, sostituendo la funzione  $J^*(t, t_0)$  alla funzione di viscosità  $J(t, t_0)$  e la funzione di rilassamento ridotta  $R^*(t, t_0)$  alla funzione di rilassamento  $R(t, t_0)$ . Tale modifica dipende dalla struttura attraverso gli autovalori  $\omega_i$ , sempre compresi tra 0 e 1. In figura 4 è riportato un diagramma di esempio della funzione di rilassamento ridotta per diversi valori del parametro  $\omega$ . Per  $\omega=1$  si ha il caso di una struttura omogeneamente viscosa con vincolo rigido per cui  $J^*(t, t_0) = J(t, t_0)$  e  $R^*(t, t_0) = R(t, t_0)$ ; per  $\omega=0$  si ha invece il caso di una struttura puramente elastica (priva di viscosità) dove per la (15) si ha  $J^*(t, t_0) = 1/E_c(t_0)$  e  $R^*(t, t_0) = E_c(t_0)$ .

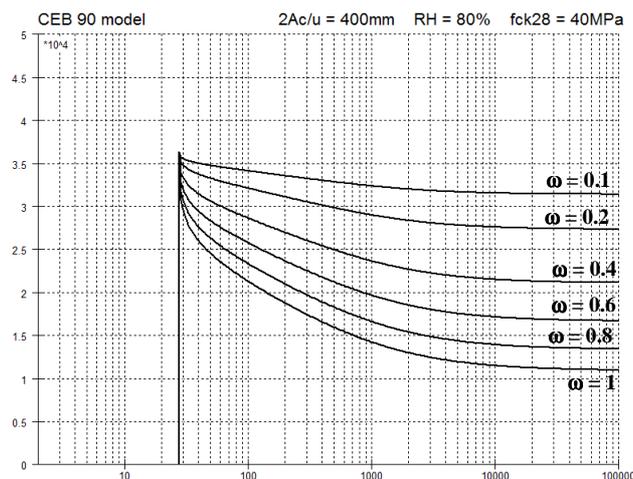


Figura 4: Esempio di funzioni del CEB Model Code 90. Funzione di rilassamento ridotta  $R^*(t, t_0)$  per diversi valori del parametro  $\omega$ .  $RH=80\%$ ,  $2A_c/u = 400$  mm,  $f_{ck} = 40$  MPa per  $t_0=28$  gg.

### 3 STATI DI SOLLECITAZIONE E DEFORMAZIONE IN PRESENZA DI SOLA VISCOSITA' PER STRUTTURE PRECOMPRESSE

Si consideri una struttura  $k$  volte iperstatica (per  $k=0$  la struttura è isostatica). Si applichi al tempo  $t_0$  un'azione permanente, sia essa un carico  $q$  dovuto ad esempio al peso proprio, sia essa il carico di precompressione  $p$ . In ambedue i casi nascono delle sollecitazioni e delle deformazioni. Per effetto della viscosità, le deformazioni variano nel tempo con il primo principio, ma mentre per i carichi permanenti le sollecitazioni rimangono costanti, la precompressione può essere riguardata come una distorsione impressa in una struttura omogeneamente viscosa con un vincolo elastico interno (il cavo o i cavi di precompressione). In questo secondo caso si ha anche una riduzione delle sollecitazioni nel tempo, costituita dalle cadute di tensione per fenomeni lenti. Nel seguito verranno esaminati ambedue i casi separatamente e verranno fornite le corrispondenti storie di sollecitazione e deformazione nel tempo.

#### 3.1 Carichi permanenti

Se la struttura, soggetta al carico  $q$  applicato a  $t_0$ , ha vincoli invariabili nel tempo, la sollecitazione generica  $S^q(t)$  rimane coincidente con quella elastica per il primo teorema della viscoelasticità lineare. Di conseguenza si ha:

$$S^q(t) = S_0^{el,q} \quad (18)$$

in cui  $S_0^{el,q}$  è la sollecitazione nello schema elastico di riferimento con il carico  $q$  applicato. La storia della generica deformazione  $D^q(t)$  procede invece con la funzione di viscosità  $J(t, t_0)$ :

$$D^q(t) = D_0^{el,q} E_c(t_0) J(t, t_0) \quad (19)$$

in cui  $D_0^{el,q}$  è la deformazione valutata nello schema elastico di riferimento con il carico  $q$  applicato.

### 3.2 Precompressione

Nel caso della precompressione applicata al tempo  $t_0$ , oltre alla presenza dello sforzo assiale  $P_0$  e dei momenti flettenti associati alle eccentricità del cavo di precompressione, l'azione della precompressione può essere interpretata come una distorsione imposta nella struttura. Ma tale distorsione agisce su una struttura di calcestruzzo che è congruente al cavo o ai cavi in acciaio. Se ci si riferisce al cavo risultante come se fosse un unico cavo, posto sezione per sezione nel baricentro dei cavi, ed al caso della precompressione a cavi scorrevoli (armatura post-tesa), quando si applica lo sforzo attraverso il martinetto alla struttura e si fissa la sezione terminale del cavo alla piastra di ancoraggio, si impone la congruenza tra cavo e struttura. Si può interpretare allora il cavo come un vincolo elastico interno che ha subito una deformazione elastica non congruente, dovuta alla tensione di trazione applicata all'atto del tiro. Tale vincolo rimane poi congruente in ogni sezione della struttura dopo l'iniezione delle guaine. Il caso è dunque quello previsto dalla relazione (17) in quanto si ha una struttura soggetta ad un vincolo elastico interno e ad una distorsione imposta  $\eta$ , costituita dallo spostamento imposto al tiro dal martinetto nella sezione di testata. La reazione del vincolo elastico  $X(t)$  non è altro che lo sforzo interno del cavo dopo il fissaggio, il quale è legato successivamente all'incremento di deformazione viscosa del calcestruzzo, cioè alla variazione di sforzo nel cavo dovuto alla viscosità del calcestruzzo nel punto di congruenza. La reazione iniziale  $X_\eta(t_0)$  coincide con lo sforzo iniziale nel cavo  $P_0$ , già depurato delle perdite istantanee di tensione. Di conseguenza la (17) si può scrivere in questo caso:

$$P(t) = P_0 \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (20)$$

che esprime l'andamento dello sforzo di precompressione, in diminuzione per effetto della caduta di sforzo per viscosità. La funzione di rilassamento ridotta  $R^*(t, t_0)$  dipende dall'autovalore  $\omega$  del vincolo elastico associato al cavo di precompressione, il quale risulta:

$$\omega = \frac{n_0 \rho_p k_p}{1 + n_0 \rho_p k_p} \quad (21)$$

in cui  $n_0 = E_p/E_c(t_0)$  è il rapporto tra i moduli elastici dell'acciaio e del calcestruzzo;  $\rho_p = A_p/A_c$  è il rapporto tra le aree di acciaio e di calcestruzzo nella sezione;  $k_p = 1 + e^2/r_c^2$  è il contributo dovuto all'eccentricità  $e$  del cavo rispetto al baricentro della sezione, essendo  $r_c$  il raggio d'inerzia della sezione di calcestruzzo. L'espressione (21) dell'autovalore  $\omega$  si trova considerando la deformabilità della struttura di calcestruzzo in corrispondenza della sezione e la deformabilità assiale del cavo stesso considerato come vincolo elastico, a partire dalla definizione della matrice  $\mathbf{D}$  nella relazione (13), per il caso di un solo vincolo elastico.

Le grandezze da introdurre nella (21) per ricavare l'autovalore con cui determinare la funzione di rilassamento ridotta, dipendono dunque dalla sezione; per analisi globali sulla struttura generalmente possono essere presi a riferimento dei valori medi di  $\rho_p$  e  $k_p$  approssimando la soluzione corretta (che dovrebbe tenere conto del reale andamento dei cavi sezione per sezione) con un errore che risulta trascurabile per numerosi casi pratici.

L'interpretazione della (20) mostra che l'andamento dello sforzo assiale nel cavo diminuisce rispetto a quello iniziale  $P_0$  della quantità  $[1 - R^*(t, t_0)/E_c(t_0)]$  che traduce quindi le cadute di tensione per viscosità e dipende dalla distribuzione delle armature di precompressione nella struttura di calcestruzzo. Poiché tutte le sollecitazioni dovute alla precompressione possono ritenersi proporzionali all'andamento dello sforzo nel tempo e

quindi alla variazione di sforzo fornito dalla (20), si può ricavare la storia della generica sollecitazione dovuta alla precompressione per il caso dei vincoli invariabili nella struttura:

$$S^p(t) = S_0^{el,p} - S_0^{el,p} \left[ 1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (22)$$

in cui  $S_0^{el,p}$  è la sollecitazione nello schema elastico di riferimento con lo sforzo di precompressione applicato.

Per il fatto che le sollecitazioni variano nel tempo, le corrispondenti deformazioni viscosi non coincidono con quelle che si avrebbero per un carico costante nel tempo ma devono tenere conto del rilassamento delle sollecitazioni indotte dalla precompressione, cioè delle cadute di sforzo. La relazione integrale che fornisce la storia delle deformazioni è dunque:

$$D^p(t) = D_0^{el,p} E_c(t_0) J(t, t_0) + D_0^{el,p} \int_{t_0^+}^t dR^*(\tau, t_0) J(t, \tau) \quad (23)$$

che, attraverso le relazioni (14), (15) e (21) diventa:

$$\begin{aligned} D^p(t) &= D_0^{el,p} + \frac{D_0^{el,p}}{n_0 \rho_p k_p} \left[ 1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] = \\ &= D_0^{el,p} E_c(t_0) J(t, t_0) + D_0^{el,p} \left\{ 1 - E_c(t_0) J(t, t_0) + \frac{1}{n_0 \rho_p k_p} \left[ 1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

Nella (24) il termine  $D_0^{el,p} E_c(t_0) J(t, t_0)$  è quello relativo alla precompressione vista come carico esterno equivalente applicato alla struttura, mentre il secondo termine traduce l'effetto sulle deformazioni delle cadute di tensione per sola viscosità. Va infatti puntualizzato che la (24) tiene conto solo della viscosità e non delle cadute dovute a ritiro o rilassamento. Inoltre essa è valida per le deformazioni associate alla curvatura indotta dalla precompressione nelle sezioni e quindi anche per gli spostamenti verticali, non è invece applicabile alla deformazione assiale, poiché quest'ultima non dipende dal parametro  $k_p$  che tiene conto dell'eccentricità dello sforzo di precompressione e dunque dei momenti flettenti indotti.

Le relazioni (22) e (24) possono essere riscritte attraverso il metodo AAEM tenendo conto che per l'algebrizzazione, la funzione di rilassamento ridotta si può esprimere attraverso la

$$1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} = \frac{n_0 \rho_p k_p \varphi(t, t_0)}{1 + n_0 \rho_p k_p [1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)]} \quad (25)$$

dalla quale, per le sollecitazioni si ottiene la relazione:

$$S^p(t) = S_0^{el,p} \left[ 1 - \frac{n_0 \rho_p k_p \varphi(t, t_0)}{1 + n_0 \rho_p k_p [1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)]} \right] \quad (26)$$

mentre per le deformazioni si ottiene la relazione:

$$D^p(t) = D_0^{el,p} \left[ 1 + \frac{\varphi(t, t_0)}{1 + n_0 \rho_p k_p [1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)]} \right] \quad (27)$$

Le espressioni fin qui viste tengono conto dell'influenza della sola viscosità e quindi delle cadute di tensione della precompressione per viscosità e per il valore di tensione, nella fibra di

calcestruzzo congruente con l'acciaio, dipendente dalla sola precompressione. In realtà le cadute di tensione dipendono anche:

- dalla tensione effettiva nella fibra di calcestruzzo che tiene conto anche del carico permanente (generalmente il peso proprio) associato alla precompressione;
- dal fatto che il momento flettente della precompressione nelle strutture iperstatiche non coincide con il momento  $P_0 \cdot e$  delle strutture isostatiche, sezione per sezione;
- dal ritiro del calcestruzzo e dal rilassamento dell'acciaio armonico, che sono ulteriori fenomeni lenti nel tempo, i quali procedono parallelamente alla viscosità, modificando le deformazioni nella fibra di calcestruzzo congruente all'acciaio e quindi le corrispondenti tensioni nell'armatura.

Per questi motivi, il contributo delle cadute di sforzo di precompressione sopra visto ed interpretato attraverso la funzione di rilassamento ridotta, va opportunamente modificato per tenere conto anche degli altri fattori sopra elencati, ossia per valutare l'intero valore delle cadute di tensione effettive che si hanno nelle sezioni precomprese della struttura considerata. Per semplicità si farà riferimento alla relazione (26); l'espressione della caduta dello sforzo di precompressione per sola viscosità è:

$$\Delta P(t) = P_0 \frac{n_0 \rho_p k_p \varphi(t, t_0)}{1 + n_0 \rho_p k_p [1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)]} \quad (28)$$

mentre l'espressione generale delle cadute di tensione nell'acciaio di precompressione per fenomeni lenti [17,19] può scriversi nella forma:

$$\Delta f_p(t) = \frac{n_0 f_{c0} \varphi(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t) E_p + f'_{re}(t)}{1 + n_0 \rho_p k_p [1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)]} \quad (29)$$

in cui  $f_{c0}$  è la tensione di compressione nella fibra di calcestruzzo alla quota dell'acciaio di precompressione;  $\varepsilon_{sh}(t)$  è la deformazione da ritiro della fibra di calcestruzzo al tempo  $t$ , valutato a partire dal tempo di getto;  $f'_{re}(t)$  è la variazione di tensione nell'armatura di precompressione per rilassamento dell'armatura stessa (relativa al rilassamento ridotto,  $f'_{re} = 0.8 f_{re}$ ).

La (29) vale nell'ipotesi in cui si considerino le deformazioni da ritiro del calcestruzzo e da rilassamento dell'acciaio variabili nel tempo in maniera analoga alla viscosità. Sotto tale ipotesi, è possibile considerare che nel tempo la deformazione totale nella fibra di calcestruzzo, aggiornata attraverso i coefficienti di invecchiamento e viscosità secondo il metodo AAEM, sia pari alla somma di quella elastica, di quella viscosa e di quella indotta dal ritiro e dal rilassamento dell'acciaio. Inoltre, la tensione  $f_{c0}$  del calcestruzzo tiene conto sia del contributo del momento flettente dovuto al peso proprio e ai carichi permanenti contemporaneamente presenti alla precompressione e a questa antagonisti, che del contributo fornito dal momento flettente iperstatico di precompressione. Se si ipotizza dunque che nel tempo, la curva del ritiro e quella del rilassamento ridotto abbiano lo stesso andamento della curva di viscosità, i rapporti tra le quantità  $\varepsilon_{sh}(t)$ ,  $f'_{re}(t)$  ed il coefficiente di viscosità  $\varphi(t, t_0)$  rimangono pressoché costanti ad ogni tempo. Esplicitando l'espressione della tensione di compressione nel calcestruzzo, la (29) diventa:

$$\Delta f_p(t) = \frac{n_0 \frac{P_0}{A_c} \left[ 1 + \left( \frac{M_d}{P_0 \cdot e} + \frac{M_p}{P_0 \cdot e} \right) (k_p - 1) \right] \varphi(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t) E_p + f'_{re}(t)}{1 + n_0 \rho_p k_p [1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)]} \quad (30)$$

in cui  $M_d$  è il momento flettente per peso proprio e carichi permanenti contemporaneamente agenti ed antagonisti alla precompressione;  $M_p$  è il momento flettente iperstatico della precompressione (per il caso isostatico  $M_p = P_0 \cdot e$ ).

La caduta dello sforzo di precompressione dovuta a viscosità, ritiro e rilassamento, tenuto conto della effettiva tensione di compressione alla fibra di calcestruzzo è dunque:

$$\Delta P(t) = P_0 \frac{n_0 \rho_p k_p \left[ 1 + \left( \frac{M_d}{P_0 \cdot e} + \frac{M_p}{P_0 \cdot e} \right) (k_p - 1) + \frac{\varepsilon_{sh}(t) E_c A_c}{\varphi(t, t_0) P_0} + \frac{f'_{re}(t) A_c}{\varphi(t, t_0) n_0 P_0} \right] \frac{1}{k_p} \varphi(t, t_0)}{1 + n_0 \rho_p k_p [1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)]} \quad (31)$$

in cui si può porre

$$\alpha_p = \left[ 1 + \left( \frac{M_d}{P_0 \cdot e} + \frac{M_p}{P_0 \cdot e} \right) (k_p - 1) + \frac{\varepsilon_{sh}(\infty) E_c A_c}{\varphi(\infty, t_0) P_0} + \frac{f'_{re}(\infty) A_c}{\varphi(\infty, t_0) n_0 P_0} \right] \frac{1}{k_p} \quad (32)$$

con  $\alpha_p$  coefficiente, indipendente dal tempo, per le ipotesi fatte, ovvero tale che, ad esempio per il ritiro risulti  $\varepsilon_{sh}(t)/\varphi(t, t_0) = \varepsilon_{sh}(\infty)/\varphi(\infty, t_0)$ . Il coefficiente correttivo  $\alpha_p > 1$  modifica, incrementandolo, il valore delle cadute per sola viscosità e la (31) diventa:

$$\Delta P(t) = \alpha_p P_0 \frac{n_0 \rho_p k_p \varphi(t, t_0)}{1 + n_0 \rho_p k_p [1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)]} \quad (33)$$

la quale differisce dalla (28) solo per il coefficiente  $\alpha_p$ . La (33) esprime la caduta dello sforzo di precompressione per viscosità, ritiro e rilassamento e per effetto della contemporanea presenza dei carichi permanenti e della precompressione (che può agire anche su una struttura iperstatica). Inoltre, se si vuole tenere conto anche dell'armatura ordinaria, basta sostituire alla quantità  $\rho_p$  la quantità  $(\rho_p + \rho_s) = (A_p + A_s)/A_c$ , considerando in questo caso il baricentro delle armature ordinarie e di precompressione per l'imposizione della congruenza del vincolo elastico. Ulteriori valutazioni sull'effetto dell'armatura non pretesa sulle cadute di precompressione possono essere trovate in [16]. Dalla (33), per la generica sollecitazione, si ottiene

$$S^p(t) = S_0^{el,p} \left[ 1 - \alpha_p \frac{n_0 \rho_p k_p \varphi(t, t_0)}{1 + n_0 \rho_p k_p [1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)]} \right] \quad (34)$$

che sostituisce la (26), in forma algebrizzata. Tornando indietro attraverso la (25), si ottiene l'espressione che sostituisce la (22) mediante la funzione di rilassamento ridotta:

$$S^p(t) = S_0^{el,p} - S_0^{el,p} \alpha_p \left[ 1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (35)$$

La (34) o la (35) forniscono la storia delle sollecitazioni nel tempo per la precompressione. La relazione che fornisce la storia delle deformazioni è invece l'analoga della (24) modificata attraverso il coefficiente  $\alpha_p$  per tenere conto anche di rilassamento e ritiro:

$$D^p(t) = D_0^{el,p} E_c(t_0) J(t, t_0) + D_0^{el,p} \alpha_p \left\{ 1 - E_c(t_0) J(t, t_0) + \frac{1}{n_0 \rho_p k_p} \left[ 1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \right\} \quad (36)$$

in cui il primo termine a secondo membro fornisce la variazione delle deformazioni per il carico equivalente alla precompressione mentre il secondo termine è il contributo delle cadute

di tensione. Mediante l'algebrizzazione, l'equivalente relazione che fornisce la storia di deformazione si scrive:

$$D^p(t) = D_0^{el,p} [1 + \varphi(t, t_0)] + D_0^{el,p} \alpha_p \varphi(t, t_0) \left[ \frac{1}{1 + n_0 \rho_p k_p [1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)]} - 1 \right] \quad (37)$$

La (36) o la (37) forniscono la storia di deformazione nel tempo per la precompressione nella struttura viscosamente omogenea considerando la caduta di sforzo per viscosità, ritiro e rilassamento. In tal modo è possibile determinare quale sia la storia degli spostamenti verticali di una struttura, dovuti alla precompressione, considerando ad ogni tempo  $t$ , l'aliquota di cadute. Le relazioni viste mettono quindi in evidenza il ruolo delle cadute nella determinazione della deformata; il primo termine fornisce l'evoluzione delle deformazioni per il carico equivalente alla precompressione mentre il secondo termine è l'aliquota in riduzione dovuta al fatto che nel tempo una parte dello sforzo viene perduto. L'incremento di deformazione risulta dunque minore di quello che si avrebbe per sforzo costante nel tempo, per effetto delle cadute. Sommando gli spostamenti verticali forniti dalla (36) con gli spostamenti per carichi permanenti (antagonisti alla precompressione) forniti dalla (19) è possibile stabilire quale sia la deformata a tempo infinito, dovuta ai due carichi contemporaneamente agenti. Ciò è molto importante per determinare correttamente in fase di costruzione le eventuali controfrecce da assegnare agli elementi di impalcato e, successivamente, per le verifiche allo stato limite di deformazione e fessurazione in esercizio.

## 5 CONCLUSIONI

Sono state presentate le basi teoriche di uno studio riguardante strutture precomprese soggette agli effetti della viscosità. È stato considerato sia il contributo dei carichi permanenti che della precompressione ed è stata valutata l'influenza delle cadute dello sforzo di precompressione per fenomeni lenti, includendo anche il ritiro del calcestruzzo ed il rilassamento dell'acciaio. Sono state fornite le leggi di variazione nel tempo delle sollecitazioni e degli spostamenti, per strutture a vincoli invariabili nel tempo, sulla base dei principi della viscoelasticità lineare con invecchiamento, utilizzando anche il metodo AAEM. In particolare sono state fornite le leggi della variazione degli spostamenti verticali in una struttura precompressa, mettendo in evidenza il ruolo delle cadute di sforzo, le quali agiscono riducendo le deformazioni viscosi che si avrebbero nel caso in cui lo sforzo iniziale al tiro non variasse. In una successiva nota verranno approfonditi gli aspetti della variazione dello schema statico per carichi permanenti e precompressione, con particolare riferimento ai ponti costruiti a sbalzo.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] H.S. Chiu, J.C. Chern and K.C. Chang, "Long term deflection control in cantilever prestressed concrete bridges", I and II. *J. Eng. Mech. ASCE*, **122**, 489-501 (1996).
- [2] Z.P. Bažant, Guang-Ha Li, Qiang Yu, "Explanation of excessive long-time deflections of collapsed record-span box girder bridge in Palau", Preliminary Report n. 08-09/A222e, 8<sup>th</sup> *International Conference on Creep and Shrinkage of Concrete CONCREEP-8*, Ise Shima, Japan (2008)
- [3] Z.P. Bažant, G.-Hua Li, Q. Yu, "Prediction of creep and shrinkage and their effects in concrete structures: Critical appraisal", *Creep, shrinkage and durability mechanics of concrete and*

- concrete structures*, Tanabe ed., Taylor & Francis, London, 1275-1289 (2008)M. Jirásek, Z.P.
- [4] C.J. Burgoyne, R.C. Scantlebury, “Why did Palau Bridge collapse?”, *The Structural Engineer*, **84** (11), 30-37 (2006)
- [5] H. Trost, “Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton,” *Beton und Stahlbetonbau*, **62** (10), 230-238, (11), 261-269 (1967)
- [6] Z.P. Bažant, “Prediction of concrete creep effects using age-adjusted effective modulus method”, *Journal of the American Concrete Institute*, **69**, 212-217 (1972).
- [7] Z.P. Bažant, *Inelastic Analysis of Structures*. Chichester: J. Wiley and sons. (2002)
- [8] M.A. Chiorino, “A Rational Approach to the Analysis of Creep Structural Effects” in: *Shrinkage and Creep of Concrete*, Gardner & Weiss ed., ACI SP-227,107-141 (2005)
- [9] M. Sassone, M.A. Chiorino, “Design Aids for the Evaluation of Creep Induced Structural Effects”, in: *Shrinkage and Creep of Concrete*, Gardner & Weiss ed., ACI SP-227, 239-259 (2005)
- [10] M.A. Chiorino, G. Creazza, F. Mola, P. Napoli, “Analysis of Aging Viscoelastic Structures with n-Redundant Elastic Restraints”, *Fourth RILEM International Symposium on Creep and Shrinkage of Concrete: Mathematical Modelling*, Z.P. Bažant ed., Northwestern University, Evanston, 623-644 (1986)
- [11] F. Mola, F. Giussani, “Long-term behaviour of cable stayed bridges”, *Studies and Researches*, Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano, **24**, 153-187 (2003)
- [12] L. Dezi, G. Menditto, A. M. Tarantino, “Viscoelastic heterogeneous structures with variable structural system”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, **119**, 238-250 (1993)
- [13] M. Arici, M.F. Granata, “Removal of temporary supports and creep effects in the sequential construction of bridges” in Chiorino-Gardner, *Structural Implication of Shrinkage and Creep of Concrete*, ACI SP246-3, 37-51 (2007)
- [14] W.H. Dilger, “Creep analysis of prestressed concrete structures using creep-transformed section properties”, *PCI Journal*, **27** (1), 98–117 (1982)
- [15] M.K. Tadros, A. Ghali, W.H. Dilger, “Time-dependent prestress loss and deflection in prestress concrete members”, *PCI Journal*, **20** (3), 86–98 (1975)
- [16] M.K. Tadros, A. Ghali, W.H. Dilger, “Effect of non-prestressed steel on prestress loss and deflection”, *PCI Journal*, **22** (2), 50–63 (1977)
- [17] A. Ghali, M.K. Tadros, “Partially prestressed concrete structures”, *J. Struct. Eng. ASCE*, **111**, 8, 1846-1865 (1985).
- [18] M.K. Tadros, A. Ghali, W.H. Dilger, “Long-term stresses and deformation of segmental bridges”, *PCI Journal*, **24** (4), 66-87 (1979)
- [19] CEN, EN 1992-1-1, *Eurocode 2 – Design of concrete structures – Part 1.1: General rules and rules for buildings*, December 2004 edition (2004)
- [20] V. Kristek, L. Vrablik, “Optimisation of tendon layout to avoid excessive deflections of long-span prestressed concrete bridges”, *Concrete engineering*, **11** (1), 30-33 (2007)
- [21] J.L. Vitek, V. Kristek, A. Kohoutkova, “Time development of deflections of large prestressed concrete bridges”, *fib Symposium on Segmental Construction in Concrete*, New Delhi (2004)
- [22] S. Hedjazi, A. Rahai, K. Sennah, “Evaluation of creep effects on the time-dependent deflections and stresses in prestressed concrete bridges”, *Bridge Structures*, **3** (2), 119-132 (2007)
- [23] CEB, Bulletin d’Information n° 213/214 - *CEB-FIP Model code 1990*, Thomas Telford, London (1993)
- [24] ACI 209R-92: “Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures”, *reported by ACI Committee 209*, 1-47, reapproved (1997)
- [25] Z.P. Bažant, S. Baweja, “Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures: model B3”, *Adam Neville symposium: creep and shrinkage-structural design effects*, ACI SP-194, A. Al-Manaseer ed., Farmington Hills, Michigan, 1-83 (2000).
- [26] N.J. Gardner, M.J. Lockman, “Design provision for shrinkage of normal strength concrete”, *ACI Materials Journal*, **2**, 159-161 (2001)
- [27] M.A. Chiorino, P. Napoli, F. Mola, M. Koprna, “CEB Design Manual on Structural Effects of

- Time-dependent Behaviour of Concrete”, *CEB Bulletin d'Information 142/142bis*, Georgi Publishing Co.: Saint-Saphorin, Switzerland (1984)
- [28] PCI, *Bridge Design Manual*, Chapter 8, Chicago, Ill. (2003)
- [29] M. Arici, M.F. Granata, “Valutazione della sicurezza in esercizio di un ponte ad arco-portale costruito per conci”, *Industrie manufatti cementizi*. **1**, 40-57 (2008).
- [30] A. Migliacci, F. Mola, *Progetto agli stati limite delle strutture in c.a.*, parte II, Case Editrice Ambrosiana, Milano (2003)
- [31] [www.polito.it/creepanalysis](http://www.polito.it/creepanalysis).