

## **ANALISI BEM DI RIPARAZIONI PIEZOELETTICHE ATTIVE: APPLICAZIONI SU STRUTTURE DANNEGGIATE IN COMPOSITO IN PRESENZA DI ATTRITO COULOMBIANO**

**A. Alaimo<sup>\*</sup>, G. Davì<sup>\*</sup>, A. Milazzo<sup>\*</sup> e C. Orlando<sup>\*</sup>**

<sup>\*</sup> Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Aerospaziale e Geotecnica (DISAG)  
Università di Palermo

Viale delle Scienze, 90128 Palermo, Italy

e-mail: [a.alaimo@unipa.it](mailto:a.alaimo@unipa.it) – [davi@unipa.it](mailto:davi@unipa.it) – [alberto.milazzo@unipa.it](mailto:alberto.milazzo@unipa.it) – [c.orlando@unipa.it](mailto:c.orlando@unipa.it)

(Ricevuto 23/12/2009, Accettato 27/12/2009)

**Key words:** Active Repair, Piezoelectric Materials, Boundary Element Method, Delamination Cracks, Friction.

**Parole chiave:** Riparazioni attive, Materiali Piezoelettrici, Metodo degli Elementi al Contorno, Delaminazione, Attrito.

**Abstract.** *The increasing development of Smart Materials, such as piezoelectric and shape memory alloys, has opened new opportunities for improving repair techniques. Particularly, active repairs, based on the converse piezoelectric effect, can increase the life of a structure by reducing the crack opening. A deep characterization of the electromechanical behaviour of delaminated composite structures, actively repaired by piezoelectric patches, can be achieved by considering the adhesive layer between the host structure and the repair and by taking into account the frictional contact between the crack surfaces. In this paper BE analyses performed on delaminated composite structures repaired by active piezoelectric patches are presented. A two dimensional boundary integral formulation for piezoelectric solids based on the multidomain technique to model the composite host damaged structures and the bonded piezoelectric patches is employed. An interface spring model is also implemented to take into account the finite stiffness of the bonding layers and to model the frictional contact between the delamination surfaces, by means of an iterative procedure.*

**Sommario.** *Il crescente sviluppo dei Materiali Intelligenti, come i materiali piezoelettrici e le leghe a memoria di forma, ha aperto nuove opportunità per lo sviluppo di tecniche di riparazione più efficienti di quelle tradizionalmente utilizzate in ambito ingegneristico. In particolare, le riparazioni attive, basate sull'effetto piezoelettrico inverso, possono contribuire ad incrementare la vita fatica di una struttura riducendo gli spostamenti relativi tra le superfici di cricca. Una caratterizzazione approfondita del comportamento elettromeccanico di strutture delaminate in composito, riparate in maniera attiva per mezzo di patch piezoelettriche, può essere ottenuta modellando lo strato di adesivo tra la struttura danneggiata e la riparazione e tenendo in considerazione gli effetti dell'attrito Coulombiano al contatto tra le superfici di cricca. Il presente articolo tratta l'analisi numerica agli elementi al contorno di strutture delaminate in composito riparate per mezzo di patch piezoelettriche attive. E' stata quindi impiegata una formulazione integrale al contorno, sviluppata per solidi piezoelettrici ed implementata mediante la tecnica Multidominio per modellare strutture laminate in composito nonché l'assemblaggio tra una struttura danneggiata e la relativa patch attiva. E' stata inoltre implementata una procedura iterativa*

*basata su un modello di interfaccia elastica, “Spring Model”, per la modellazione sia dello strato adesivo che dell’attrito Coulombiano tra le superfici delaminate.*

## 1 INTRODUZIONE

Negli ultimi anni lo sviluppo dei materiali intelligenti ha determinato la nascita di una nuova metodologia di riparazione comunemente denominata “*Active Repair*”. Sfruttando le caratteristiche di attuazione di materiali come le leghe a memoria di forma o i piezoceramici è infatti possibile ottenere tecniche di riparazione più efficienti rispetto a quelle comunemente adoperate in ambito Aeronautico<sup>1</sup>. In particolare, l’impiego di patch piezoelettriche può contribuire a ridurre in maniera attiva gli spostamenti relativi tra le superfici di cricca. Infatti, sfruttando l’effetto piezoelettrico inverso è possibile indurre sulla struttura danneggiata una deformazione tale da opporsi al modo di sollecitazione della frattura ed essere quindi in grado di ridurre la criticità<sup>2,3</sup>. Per un’opportuna progettazione dei suddetti dispositivi è necessaria una accurata caratterizzazione del comportamento elettromeccanico della struttura riparata. A tal scopo Liu<sup>3,4</sup> ha recentemente condotto analisi bidimensionali agli elementi finiti per studiare il comportamento di patch piezoelettriche multistrato mentre Duan et al.<sup>5</sup> hanno applicato il metodo degli elementi finiti per l’analisi di travi delaminate in presenza di riparazioni attive. Alaimo et al.<sup>2,6</sup> hanno sviluppato una procedura agli elementi al contorno per l’analisi di strutture danneggiate isotrope<sup>2</sup> ed in materiale composito<sup>6</sup>, evidenziando gli effetti dello strato di adesivo esistente tra la struttura danneggiata e la patch piezoelettrica attiva.

Una valutazione più accurata dei meccanismi di riparazione attiva può essere ottenuta modellando l’attrito tra le superfici di cricca, cioè modellando le azioni tangenziali che si destano qualora le suddette superfici si trovino in una condizione di contatto. Gli effetti dell’attrito sulle performance di riparazione di patch piezoelettriche attive sono stati recentemente studiati da Liu<sup>4</sup> che ha evidenziato come, nel caso di cricche sollecitate esclusivamente a modo I, tale fenomeno possa considerarsi trascurabile.

Sulle basi appena delineate, nel presente articolo è stato affrontato lo studio della risposta elettromeccanica di patch piezoelettriche attive applicate su strutture delaminate in composito. In particolare, oltre agli effetti legati alla presenza dello strato di adesivo tra struttura danneggiata e riparo attivo, è stata modellata la presenza dell’attrito Coulombiano al contatto tra le superfici di delaminazione. Per il conseguimento degli obiettivi prefissi è stato sviluppato un codice agli elementi al contorno basato sulla tecnica Multidominio. Per la modellazione dello strato di adesivo si è fatto ricorso ad un modello di interfaccia elastica, “*Spring Model*”, che ha consentito, inoltre, tramite un’opportuna procedura iterativa, la modellazione di problemi di contatto con attrito. Il comportamento a frattura della struttura riparata è stato studiato in termini di rateo di rilascio energetico totale  $G_T$  ed angolo di fase  $\Psi$ , parametri caratteristici nel caso di cricche all’interfaccia tra due materiali eterogenei. Analisi condotte su una configurazione drop-ply hanno consentito di individuare le condizioni di riparazione della struttura danneggiata e gli effetti dell’attrito sul comportamento a frattura della stessa.

## 2 FORMULAZIONE BEM MULTIDOMINIO

Allo scopo di modellare strutture laminate in composito riparate per mezzo di patch attive piezoelettriche è stata implementato un codice agli elementi al contorno basato sulla tecnica

multidominio<sup>7</sup>. Per tenere in considerazione l'accoppiamento elettromeccanico, la formulazione è stata sviluppata per solidi anisotropi piezoelettrici nell'ipotesi di elasticità lineare e stato piano di deformazione<sup>7-9</sup>. La rappresentazione integrale al contorno è stata derivata, in termini di variabili generalizzate, a partire da un'estensione del teorema di reciprocità di Betti per il problema elettroelastico. Introducendo una opportuna notazione matriciale, è quindi possibile esprimere l'Identità di Somigliana per il problema elettromeccanico<sup>10</sup> come

$$\mathbf{c}^* \mathbf{U}(P_0) + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T}^* \mathbf{U} - \mathbf{U}^* \mathbf{T}) d\partial\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \mathbf{F} d\Omega \quad (1)$$

essendo  $\mathbf{U} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \varphi]^T$  e  $\mathbf{T} = [t_1 \ t_2 \ t_3 \ D_N]^T$  rispettivamente gli spostamenti e le trazioni generalizzate ed  $\mathbf{F}$  il vettore delle forze di volume generalizzate. I Kernel  $\mathbf{U}^*$  e  $\mathbf{T}^*$  contengono invece le componenti delle 4 soluzioni fondamentali per gli spostamenti e per le trazioni mentre la matrice  $\mathbf{c}^*$  è definita come<sup>7</sup>

$$\mathbf{c}^* = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^* d\partial\Omega \quad (2)$$

Collocando il generico punto  $P_0$  sulla frontiera  $\partial\Omega$ , l'Identità di Somigliana fornisce le equazioni integrali al contorno che accoppiate alle opportune condizioni al contorno consentono di risolvere il problema in funzione delle sole variabili al contorno<sup>6</sup>. L'implementazione numerica delle equazioni integrali al contorno può quindi essere ottenuta facendo ricorso al BEM classico<sup>8,9</sup> che consente di esprimere il problema elettromeccanico in forma discreta a mezzo del seguente sistema algebrico lineare

$$\mathbf{H}\delta + \mathbf{G}\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (3)$$

in cui  $\delta$  e  $\mathbf{P}$  rappresentano rispettivamente i vettori degli spostamenti e delle trazioni nodali mentre  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  sono le matrici di influenza per gli spostamenti e per le trazioni.

Nel caso in cui si vogliano modellare strutture laminate in composito o comunque strutture costituite da materiali eterogenei è possibile far ricorso alla tecnica Multidominio. Il suddetto metodo è basato sulla suddivisione del dominio di partenza in un numero finito  $M$  di sottoregioni omogenee per ognuna delle quali è possibile esprimere il sistema, rappresentato dall'eq. 3, nella forma seguente

$$\sum_{j=1}^M \mathbf{H}_{ij}^i \delta_{ij}^i = \sum_{j=1}^M \mathbf{G}_{ij}^i \mathbf{P}_{ij}^i \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (4)$$

nella quale l'apice  $i$  fa riferimento alle grandezze associate all' $i$ -esimo sottodominio, mentre il pedice  $ij$  indica le grandezze relative ai nodi appartenenti all'interfaccia tra l' $i$ -esimo ed il  $j$ -esimo sottodominio. Si vuole altresì evidenziare che, nell'eq. (4),  $\mathbf{H}_{ij}^i$  e  $\mathbf{G}_{ij}^i$  contengono i coefficienti di influenza pertinenti rispettivamente le grandezze  $\delta_{ij}^i$  e  $\mathbf{P}_{ij}^i$ . La soluzione del problema originario può quindi essere ottenuta imponendo le condizioni di congruenza e di equilibrio all'interfaccia tra due sottoregioni adiacenti, ovvero facendo in modo che si verifichino, nel caso di interfaccia perfetta, le seguenti condizioni

$$\begin{aligned} \delta_{ij}^i &= \delta_{ij}^j & i = 1, \dots, M-1; & \quad j = i+1, \dots, M \\ \mathbf{P}_{ij}^i &= -\mathbf{P}_{ij}^j & i = 1, \dots, M-1; & \quad j = i+1, \dots, M \end{aligned} \quad (5)$$

### 3 SPRING MODEL E STRATEGIA DI MODELLAZIONE DELL'ATTRITO COULOMBIANO

Le relazioni espresse dall'eq. (5) si riferiscono alle condizioni di congruenza ed equilibrio da imporre nel caso in cui tra due domini adiacenti si assuma l'esistenza di un'interfaccia ideale. Qualora si voglia modellare un'interfaccia avente rigidezza finita, dovuta alla presenza di uno strato adesivo, si può ricorrere ad un modello di interfaccia comunemente denominato "Spring Model<sup>2</sup>". Il suddetto modello prevede l'esistenza di un salto tra gli spostamenti dei nodi appartenenti all'interfaccia tra due domini adiacenti. Indicando quindi con  $\Delta\delta^j$  il vettore che individua il salto tra gli spostamenti di ogni coppia di nodi all'interfaccia tra l' $i$ -esimo ed il  $j$ -esimo dominio, le condizioni di compatibilità relative ad un'interfaccia imperfetta assumono la forma seguente

$$\delta_{ji}^j = \delta_{ij}^i + \Delta\delta^{ij} \quad i = 1, \dots, M - 1; \quad j = i + 1, \dots, M \quad (6)$$

Si consideri a questo punto un sistema di riferimento locale centrato in corrispondenza ad ogni singolo nodo appartenente all' $i$ -esima sottoregione, come mostrato in fig. (1).

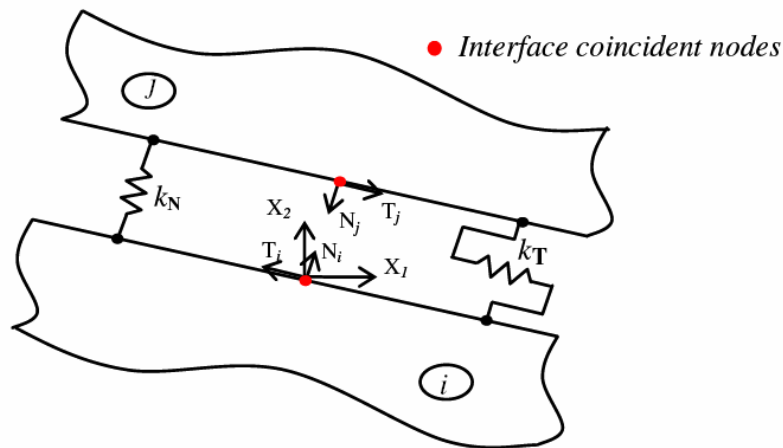


Figura 1: Spring Model e sistema di riferimento locale.

Rispetto al suddetto riferimento è possibile individuare una componente normale ed una tangenziale per il salto degli spostamenti  $\Delta\delta^j$  che in accordo con lo Spring Model possono essere espresse in funzione delle rispettive componenti delle trazioni nodali come segue

$$\begin{aligned} \delta_N^j &= \delta_N^i + \Delta\delta_N^{ij} & \text{with} & \quad \Delta\delta_N^{ij} = k_N \mathbf{P}_N^i \\ \delta_T^j &= \delta_T^i + \Delta\delta_T^{ij} & \text{with} & \quad \Delta\delta_T^{ij} = k_T \mathbf{P}_T^i \end{aligned} \quad (7)$$

essendo  $k_N$  e  $k_T$  le costanti di cedevolezza in direzione normale e tangenziale. L'interfaccia elastica espressa dall'eq. (7) consente quindi la modellazione dell'incollaggio tra la struttura danneggiata e la patch attiva definendo opportunamente le costanti di cedevolezza  $k_N$  e  $k_T$  sulle base delle proprietà elastiche dell'adesivo, vedi Alaimo et al.<sup>2</sup>. La modellazione del problema di contatto, governato dall'attrito Coulombiano, è stata ottenuta grazie ad una procedura "Trial and error" che in maniera iterativa modifica i coefficienti  $k_N$  e  $k_T$  sulla base dei modi di contatto<sup>11</sup> associati alla soluzione corrente. Più in dettaglio, la procedura iterativa individua inizialmente le superfici potenzialmente a contatto. In questa fase vengono

modificati i valori di  $k_N$  sulla base del segno delle trazioni normali all'interfaccia in modo da assicurare la non-compenetrazione tra i nodi di interfaccia. Una volta individuate le superfici potenzialmente a contatto si procede al controllo dei possibili modi di attrito<sup>11</sup>. In particolare, facendo riferimento alla legge sull'attrito Coulombiano, se per una coppia di nodi  $P_T$  risulta inferiore di  $\mu P_N$  allora il corrispondente valore di  $k_T$  viene ridotto finché non si raggiunge una condizione di "stick". Di contro, qualora  $P_T$  dovesse superare  $\mu P_N$  i nodi di interfaccia sono in una condizione di "slip" e quindi  $k_T$  viene incrementato fino al raggiungimento della condizione  $P_T = \mu P_N$ . Per maggiore chiarezza, in fig. (2) è illustrato uno schema a blocchi della procedura.

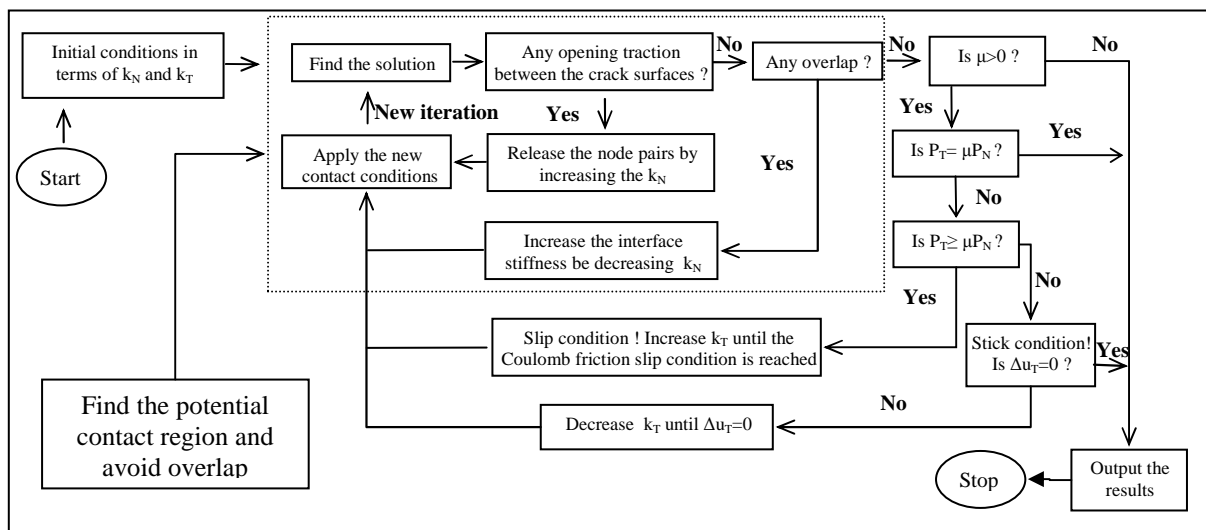


Figura 2: Schema a blocchi della procedura iterativa.

### 3.1 Validazione della procedura iterativa

La strategia di modellazione dell'attrito Coulombiano, proposta nel presente articolo, è stata validata attraverso l'analisi di un punzone piano a contatto con un basamento elastico, precedentemente studiato da Man<sup>11</sup>. La geometria, le condizioni al contorno, le proprietà dei materiali dei due solidi ed il coefficiente di attrito considerato per l'analisi sono riassunti in fig. 3(a). In figura 3(b) è mostrato l'andamento delle trazioni normali e tangenziali adimensionalizzate agenti all'interfaccia tra i due corpi.

Come precedentemente evidenziato da Man<sup>11</sup>, in corrispondenza all'ascissa  $x_1/L_2=0.8$  i nodi a contatto passano da una condizione di stick ad una condizione slip. L'ottimo confronto tra i risultati ottenuti e quelli reperiti in letteratura ha consentito inoltre la validazione della procedura impiegata.

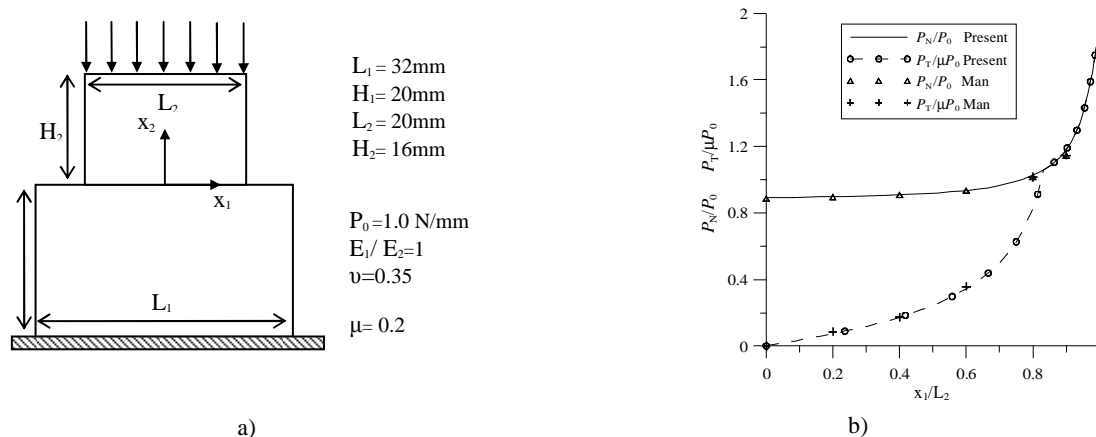


Figura 3: a) Configurazione analizzata ; b) Componenti delle trazioni di contatto.

#### 4 MECCANICA DELLA FRATTURA NEL CASO DI CRICCHE ALL'INTERFACCIA TRA MATERIALI ETEROGENEI

Il comportamento a frattura interlaminare dei laminati in composito è caratterizzato da un campo di tensioni che in prossimità dell'apice della delaminazione assume un andamento oscillatorio determinato dalle diverse proprietà dei materiali all'interfaccia. Inoltre, nel caso di un problema piano, i modi I e II di frattura per cricche all'interfaccia tra materiali eterogenei sono sempre accoppiati, rendendo priva di significato la definizione classica di "Stress Intensity Factor" utilizzata nel caso di cricche tra materiali omogenei. La caratterizzazione a frattura di problemi di delaminazione può quindi essere ottenuta per mezzo di uno "Stress Intensity Factor" (SIF) complesso esprimibile nella forma seguente

$$K = K_1 + iK_2 \quad (8)$$

Il suddetto SIF, introdotto da Rice e Sih<sup>12</sup> per tenere in considerazione l'andamento oscillatorio delle tensioni all'interno della zona singolare e l'accoppiamento tra il modo I e II di frattura, come già accennato, non possiede lo stesso significato fisico dei fattori di intensificazione degli sforzi,  $K_I$  e  $K_{II}$ , relativi a cricche presenti all'interno di materiali omogenei. Più in dettaglio, mentre  $K_I$  e  $K_{II}$  consentono di caratterizzare univocamente i modi I e II di frattura, la parte reale  $K_1$  e la parte immaginaria  $K_2$  del SIF complesso contengono indicazioni sul modo di apertura e di scorrimento nel piano ma non caratterizzano univocamente il loro comportamento. Nel caso di problemi di delaminazione è quindi necessario calcolare i due parametri di frattura  $K_1$  e  $K_2$  e quindi lo Stress Intensity Factor complesso  $K$ . In alternativa, la caratterizzazione a frattura della delaminazione può essere ottenuta per mezzo del rateo di rilascio energetico totale  $G$  che nel caso di cricche all'interfaccia tra materiali diversi deve essere necessariamente accompagnato dal cosiddetto angolo di fase  $\Psi$ , parametro che fornisce indicazioni sul grado di accoppiamento dei modi di frattura. Per il calcolo dei suddetti parametri si è fatto ricorso all'approccio proposto da Suo et al.<sup>13</sup>. I fattori di intensificazione degli sforzi sono stati quindi calcolati utilizzando il "Displacement extrapolation method", che lega gli spostamenti relativi tra i nodi di cricca con i SIF per mezzo della seguente espressione

$$\Delta\delta = (\mathbf{H} + \tilde{\mathbf{H}}) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ \frac{K r^{i\varepsilon} \mathbf{w}}{(1+2i\varepsilon) \cosh \pi\varepsilon} + \frac{\tilde{K} r^{-i\varepsilon} \tilde{\mathbf{w}}}{(1-2i\varepsilon) \cosh \pi\varepsilon} + \frac{K_3 r^k \mathbf{w}_3}{(1+2k) \cos \pi k} + \frac{K_4 r^{-k} \mathbf{w}_4}{(1-2k) \cos \pi k} \right] \quad (9)$$

essendo  $\Delta\delta$  il vettore degli spostamenti relativi tra i nodi di cricca ad una distanza  $r$  dal tip,  $K_3$  e  $K_4$  i SIF relativi ai modi III e IV,  $\mathbf{H}$  la matrice caratterizzante i due materiali definita da Suo et al.<sup>13</sup> mentre  $\varepsilon$ ,  $k$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{w}_3$  and  $\mathbf{w}_4$  gli autovalori e gli autovettori del problema omogeneo di Hilbert<sup>13</sup>. L'angolo di fase  $\Psi$  è quindi definito come

$$\Psi = \arctan \left( \frac{K_2}{K_1} \right) \quad (10)$$

mentre il rateo di rilascio energetico totale può essere espresso nella forma seguente

$$G = \frac{\tilde{\mathbf{w}}^T (\mathbf{H} + \tilde{\mathbf{H}}) \mathbf{w}}{4 \cosh^2 \pi\varepsilon} |K|^2 + \frac{\tilde{\mathbf{w}}_3^T (\mathbf{H} + \tilde{\mathbf{H}}) \mathbf{w}_4}{4 \cos^2 \pi k} K_3 K_4 \quad (11)$$

## 5 RISULTATI NUMERICI

In questo paragrafo saranno discussi i risultati relativi all'analisi di una struttura delaminata in composito con configurazione drop-ply, riparata per mezzo di patch attive PZT-4 multistrato, come mostrato in figura 4(a). La geometria, le condizioni al contorno e le proprietà del materiale graphite/epoxy utilizzato per realizzare la struttura danneggiata sono state tratte da Narayan et al.<sup>14</sup>

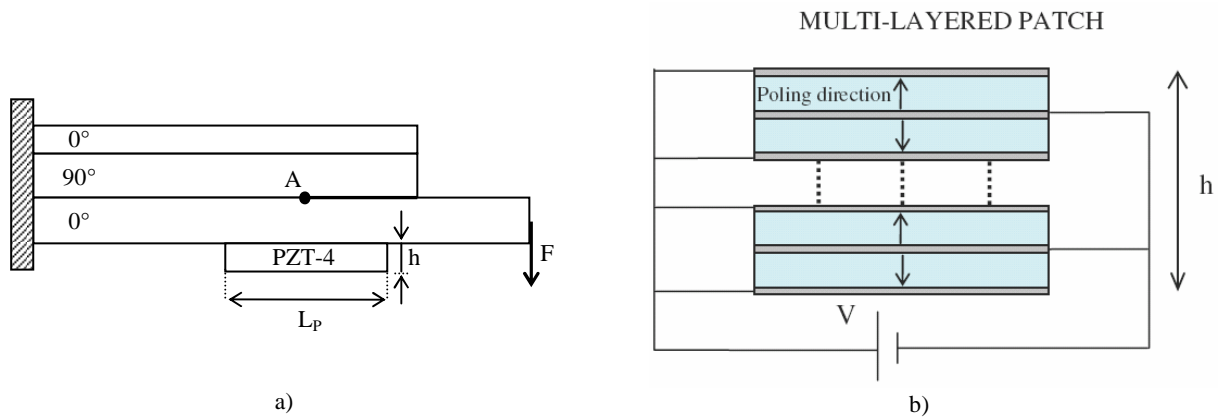


Figura 4: a) Configurazione riparata ; b) Schema circuitale della patch piezoelettrica.

La patch piezoelettrica multistrato, il cui schema circuitale è mostrato in figura 4(b), è stata invece ottenuta utilizzando 10 strati di PZT-4<sup>2</sup> ed è caratterizzata dall'aver lunghezza  $L_p=20.4$  mm ed altezza  $h=1.5$  mm. Per l'incollaggio è stato invece considerato uno strato di resina epossidica avente spessore  $t_a=0.1$  mm, modulo di Young  $E=56.5$  GPa e coefficiente di Poisson  $\nu=0.33$ , ai quali corrispondono le seguenti costanti di cedevolezza di interfaccia  $k_N=1.56 \times 10^{-5}$  m/GPa e  $k_T=9.33 \times 10^{-5}$  m/GPa. Il comportamento a frattura della struttura riparata è stato caratterizzato, al variare del coefficiente d'attrito, in termini di rateo di rilascio energetico totale  $G_T$  e dell'angolo di fase  $\Psi$ .

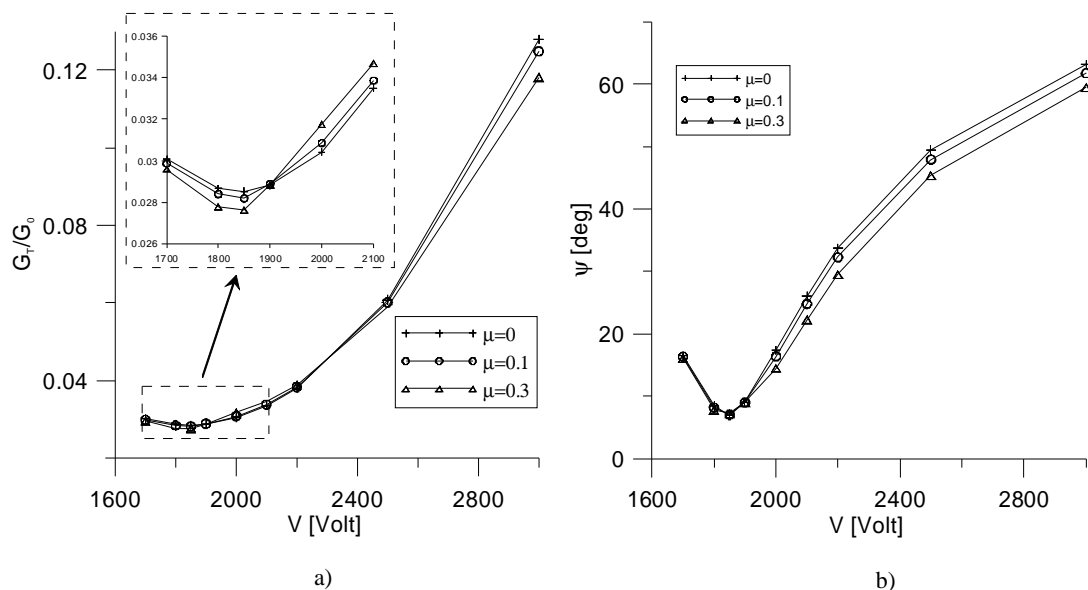


Figura 5: a) Configurazione riparata ; b) Schema circuitale della patch piezoelettrica.

In particolare, l'andamento di  $G_T$  al variare del voltaggio applicato, mostrato in vedi figura 5(a), ha consentito di individuare, in virtù di un criterio di riparazione basato su considerazioni energetiche<sup>3</sup>, la condizione di riparazione. La distribuzione di  $\Psi$  al variare del voltaggio applicato, riportata in vedi figura 5(b), ha consentito invece di comprendere i meccanismi di riparazione della patch piezoelettrica. La distribuzione del rateo di rilascio energetico totale è stata espressa in forma dimensionale dividendo  $G_T$  per il valore del rateo di rilascio energetico totale  $G_0$  associato alla struttura non riparata. Dalla figura 5(a) si può evincere che la condizione di riparazione per i tre valori del coefficiente di attrito, corrispondente al minimo valore del rateo di rilascio energetico totale, viene raggiunta in corrispondenza ad un voltaggio di riparazione  $V_r=1850$  Volt. Il coefficiente di attrito non ha quindi alcuna influenza sul valore del voltaggio di riparazione  $V_r$ . Di contro gli effetti dell'attrito influiscono sui meccanismi di riparazione per valori del voltaggio applicato inferiori o superiori a  $V_r$ . In particolare, per  $V \leq V_r$  la presenza dell'attrito tra le superfici di cricca a contatto comporta un miglioramento delle caratteristiche di riparazione. Al crescere del coefficiente d'attrito, per dato voltaggio applicato, si ottiene infatti una riduzione del valore di  $G_T$ . Lo stesso comportamento è evidenziato per  $V > V_r$  ad eccezione dei valori del voltaggio all'interno dell'intervallo  $1900 < V < 2200$  in cui, al crescere di  $\mu$  si ottiene una riduzione complessiva delle performance di riparazione. Dall'andamento dell'angolo di fase, mostrato in figura 5(b), si può inoltre notare che in corrispondenza della condizione di riparazione  $\Psi$  raggiunge il suo minimo, mentre la presenza dell'attrito determina, per dato valore del voltaggio applicato, una riduzione dell'angolo di fase e quindi una riduzione complessiva dell'aliquota di modo II rispetto al modo I.

## 6 CONCLUSIONI

Nel presente lavoro sono stati esaminati gli effetti dell'attrito Coulombiano sulle capacità di riparazione di patch piezoelettriche attive applicate su strutture delaminate in composito. L'uso della tecnica multidominio per l'implementazione numerica della formulazione integrale al contorno per solidi piezoelettrici ha consentito la modellazione di laminati in



composito nonché l'assemblaggio tra struttura danneggiata e patch attive. E' stata inoltre implementata una procedura iterativa capace di modificare le costanti di cedevolezza, caratterizzanti un'interfaccia imperfetta, così da poter modellare i fenomeni di attrito tra superfici di cricca a contatto. Il comportamento a frattura della struttura delaminata è stato caratterizzato in termini di rateo di rilascio energetico totale  $G_T$  e angolo di fase  $\Psi$ . Le analisi condotte su una configurazione in composito drop-ply, riparata per mezzo di una patch in PZT-4 multistrato, hanno evidenziato come la presenza dell'attrito influisca positivamente sulle capacità di riparazione.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] A.A. Baker, L.R.F. Rose and R. Jones, *Advances in the Bonded Composite Repair of Metallic Aircraft Structures*, Elsevier, Amsterdam (2002).
- [2] A. Alaimo, A. Milazzo and C. Orlando, "Boundary element analysis of adhesively bonded piezoelectric active repair", *Engineering Fracture Mechanics*, 76, 500-511, (2009).
- [3] T.J.C. Liu, "Fracture mechanics and crack contact analyses of the active repair of multi-layered piezoelectric patches bonded on cracked structures", *Theoretical Applied Fracture Mechanics*, 47, 120-132, (2007).
- [4] T.J.C. Liu, "Crack repair performance of piezoelectric actuator estimated by slope continuity and fracture mechanics" , *Engineering Fracture Mechanics*, 75, 2566-2574, (2008).
- [5] W.H. Duan, S.T. Quek and Q. Wang, "Finite element analysis of the piezoelectric based repair of delaminated beam" ,*Smart Materials and Structures*, 17, (2008) 015017 (7pp).
- [6] A. Alaimo, A. Milazzo and C. Orlando, "BE analysis of delaminated Composite Structures repaired with Piezoelectric Active patches", *Proceeding of the International Conference on Computational & Experimental Engineering & Sciences ICCES'09*, Phuket, Thailand, 8-13 April, (2009).
- [7] G. Davì, A. Milazzo, "Multidomain boundary integral formulation for piezoelectric material fracture mechanics", *International Journal of Solids and Structures*, 38, 7065-7075, (2001).
- [8] M.H. Aliabadi, *The Boundary Element Method, Volume 2: Application in Solids and Structures*, Wiley, Chirchester), (2002).
- [9] P.K. Banerjee, R. Butterfield, *Boundary element methods in engineering science*, McGraw-Hill (Maidenhead), (1981).
- [10] M. Denda, J. Lua, "development of the boundary element method for 2D piezoelectricity", *Composites*, part B, 30, 699-707, (1981).
- [11] K.W. Man *Topics in Engineering, Vol.22: Contact Mechanics using Boundary Elements*, Computational Mechanics Publications (1994).
- [12] J.R. Rice, G. Sih, "Plane problems of crack in dissimilar media", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 32, 418-423, (1965).
- [13] Z. Suo, C.M. Kuo, D.M. Barnett, J.R. Willis, "Fracture mechanics of piezoelectric ceramics" , *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 (4), 739-765, (1992).
- [14] S.H. Narayan, J.L. Beuth, "Designation of mode mix in orthotropic composite delamination problems", *International Journal of Fracture*, 90, 383-400, (1998).